**Sujet 52

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Pour tout entier naturel n, on définit la suite (u_n) par : $u_n=3\times\frac{10^n}{2^{n+1}}$.

La suite (u_n) est une suite

A	B	C	D
arithmétique de raison 3	géométrique de raison 3	arihhmétique de rauson 5	géométrique de raison 5

Question 2

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan, on considère les points A(-2;1) et B(2;4).
La droite Δ passe par le point C(-1;1) et admet $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal.
La droite Δ admet pour équation cartésienne

A	B	C	D
3x-4y+7=0	4x+3y+1=0	3x-2y-1=0	4x+3y+7=0

Question 3

Dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, l'unique solution de l'équation : $2\cos(x+\pi)+1=0$ est :

A	B	C	D
$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$

Question 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur ℝ par : $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.

La fonction dérivée f' de la fonction f est définie par :

A	B	C	D
$f'(x)=\frac{e}{1+e}$	$f'(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$	$f'(x)=1$	$f'(x)=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$

Question 5

On définit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-0,5(x+2)^2+4,5$.
On peut affirmer que :

A

Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-∞		2		+∞
f(x)		↗	4.5	↘	

B

La courbe représentative de f admet un sommet de coordonnées $(4,5;-2)$.

C

Le signe de f(x) est donné ci-dessous :

x	-∞		- 5		1		+∞
f(x)		−	0	+	0	−	

D

La fonction f admet un minimum en -2 égal à 4,5.

CORRECTION

Question 1 : D

Preuve non demandée

Pour tout entier naturel n ; $u_n=3\times\frac{10^n}{2^{n+1}}=3\times\frac{10^n}{2^n\times 2}=3\times\frac{1}{2}\times\frac{10^n}{2^n}=\frac{3}{2}\times\left(\frac{10}{2}\right)^n=\frac{3}{2}\times 5^n$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=\frac{3}{2}$ et de raison 5.

Question 2 : B

Preuve non demandée

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ M(x;y) C(-1;1) $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$

M(x;y) appartient à Δ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CM}$ donc si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0$

$\Leftrightarrow\quad 4(x+1)+3(y-1)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x+4+3y-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4x+3y+1=0$

Question 3 : A

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel x on a $\cos(x+\pi)=-\cos x$ donc $2\cos(x+\pi)+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad -2\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow\quad \cos x=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad\frac{\pi}{3}$ appartient à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Remarque : $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\pi\right)=\frac{1}{2}$ mais $-\frac{5\pi}{3}$ n'appartient pas à l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Question 4 : B

Preuve non demandée

$u(x)=e^x \qquad u'(x)=e^x \qquad v(x)=1+e^x \qquad v'(x)=e^x \qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$f'(x)=\frac{e^x\times(1+e^x)-e^x\times e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

Question 5 : C

Preuve non demandée

$f(x)=-0,5(x+2)^2+4,5$

$f(-2)=4,5$ si $x\neq-2$ alors $f(x)<4,5$ donc f admet un maximum pour x=-2 égal à 4,5.

Les affirmations A, B et C sont fausses donc l'affirmation C est vraie.

Remarque :

On peut aussi écrire :

$f(x)=-0,5(x+2)^2+4,5=-0,5[(x+2)^2-9]=-0,5(x+2-3)(x+2+3)=-0,5(x-1)(x+5)$

F(x) admet pour racines -5 et 1 et le coefficient de x^2 est négatif.

EXERCICE 2 (5 points)

Une fleuriste met en évidence quatre sortes de bouquets dont les tarifs et la composition sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

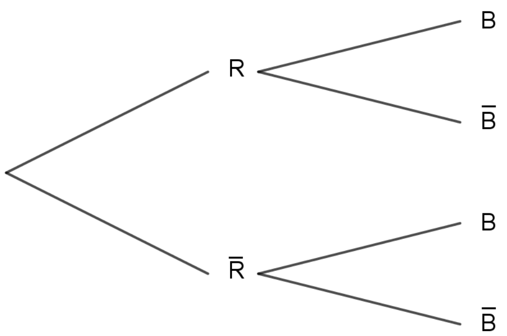
Bouquet de tulipes orange: 10.50€	Bouquet de roses orange: 23.50€
Bouquet de tulipes blanches: 11.60€	Bouquet de roses blanches: 25.50€

. 72 % des bouquets mis en vente ne contiennent que des roses.
. Les autres bouquets mis en vente ne contiennent que des tulipes.
. 20 % des bouquets de tulipes mis en vente ne contiennent que des tulipes orange.
. 36 % des bouquets mis en vente ne contiennent que des roses blanches.

Un client achète au hasard un bouquet parmi ceux mis en vente par la fleuriste.
On note ;
. R l'événement : « le bouquet acheté par le client est composé de roses ».
. B l'événement : « le bouquet acheté par le client est composé de fleurs blanches ».
Les événement contraires des événements R et B sont notés respectivement $\overline{R}$ et $\overline{B}$.

1.a. Donner, sans justifier, la probabilité $P(R \cap B)$.

1.b. Recopier et compléter le plus possible l'arbre de probabilités ci-dessous en traduisant uniquement les données de l'énoncé.



1.c. Montrer que $P(B)=0{,}584$.

2. On note X la variable aléatoire qui donne le prix d'un bouquet acheté par un client.

2.a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant, pour chaque valeur x_i de X la probabilité de l'événement $\{X=x_i\}$. Justifier.

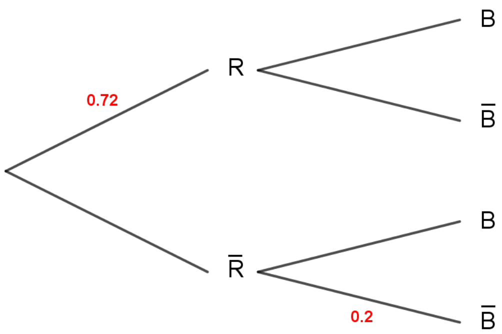
x_i				
$P(X=x_i)$				

2.b. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.
On arrondira le résultat au centième.

CORRECTION

1.a. $P(R \cap B) = 0{,}36$

1.b. 72 % des bouquets mis en vente ne contiennent que des roses donc $P(R) = 0{,}72$.
20% des bouquets de tulipes mis en vente ne contiennent que des tulipes orange donc $P_{\bar{R}}(\bar{B}) = 0{,}2$.
On obtient :



1.c. En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient : $P(B) = P(B \cap R) + P(B \cap \bar{R})$.

$P(B \cap \bar{R}) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(B)$

$P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$

$P_{\bar{R}}(B) = 1 - P_{\bar{R}}(\bar{B}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$P(B \cap \bar{R}) = 0{,}28 \times 0{,}8 = 0{,}224$

$P(B \cap R) = 0{,}36$

$P(B) = 0{,}36 + 0{,}224 = 0{,}584$

2.a. On classe les x_i dans l'ordre croissant.

$x_1 = 10{,}50 \quad x_2 = 11{,}60 \quad x_3 = 25{,}50 \quad x_4 = 25{,}50$

$P(X = x_1) = P(\bar{R} \cap \bar{B}) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(B) = 0{,}28 \times 0{,}2 = 0{,}056$

$P(X = x_2) = P(\bar{R} \cap B) = 0{,}224$

$P(X = x_4) = P(R \cap B) = 0{,}36$

$P(X = x_3) = P(R \cap \bar{B})$

1ère méthode

$P(R \cap B) = P(R) \times P_R(B) = 0{,}72 \times P_R(B) = 0{,}36$

$P_R(B) = \dfrac{0{,}36}{0{,}72} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

$P_R(\bar{B}) = 1 - P_R(B) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$P_F(R \cap \bar{B}) = P(R) \times P_R(\bar{B}) = 0{,}72 \times 0{,}5 = 0{,}36$

2ème méthode

$P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) = 1$

$P(X = x_3) = 1 - P(X = x_1) - P(X = x_2) - P(X = x_4) = 1 - 0{,}056 - 0{,}224 - 0{,}36 = 0{,}36$

On complète le tableau.

x_i	10.50	11.60	23.50	25.50
$P(X=x_i)$	0.056	0.224	0.36	0.36

2.b. $E(X) = 10{,}50 \times 0{,}056 + 11{,}60 \times 0{,}225 + 23{,}50 - 0{,}36 + 25{,}50 \times 0{,}36 = 0{,}588 + 2{,}5984 + 8{,}46 + 9{,}18$

$E(X) = 20{,}83$ arrondi au centième.

EXERCICE 3 (5points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0;10] par $f(x)=60x\,e^{-0,5x}$.
La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.

1. Démontrer que, pour tout réel x : $f'(x)=-30(x-2)e^{-0,5x}$.

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0;10].

3. Établir le tableau de variation de f sur l'intervalle [0;10].
On indiquera dans ce tableau les valeurs exactes des extremums.

4. Quelles sont les coordonnées du point en lequel la tangente à la courbe représentative de la fonction f est parallèle à l'axe des abscisses ?

5. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;10], $f(x)=60xe^{-0,5x}$.

$u(x)=60x$ $\quad$ $u'(x)=60$

$v(x)=e^{-0,5x}$ $\quad$ $v'(x)=-0,5e^{-0,5x}$

$f'(x)=60e^{-0,5x}+60x(-0,5e^{-0,5x})=60e^{-0,5x}-30xe^{-0,5x}=-30(x-2)e^{-0,5x}$

2. Pour tout nombre réel x ce l'intervalle [0;10], $e^{-0,5x}>0$.
Donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-30(x-2)$.

x	0		2		10
f '(x)		+	0	–	

3. $f(0)=0$ $\quad$ $f(2)=120e^{-1}=\dfrac{120}{e}$ $\quad$ $f(10)=600e^{-5}=\dfrac{600}{e^5}$

Tableau de variation de f

x	0		2		10
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	↗	$\frac{120}{e}$	↘	$\frac{600}{e^5}$

4. La tangente à la courbe représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses au point $A(x_0;y_0)$ (avec $0\leqslant x_0\leqslant 10$) si et seulement si $f'(x_0)=0$.
Or $f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$

La courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point $A\left(2;\dfrac{120}{e}\right)$.

5. $f(0)=0$ $\quad$ $f'(0)=60e^0=60$
L'équation réduite de la tangente, à la courbe représentative de f, à l'origine est : $y=60x$.

EXERCICE 4 (5 points)

Le 1^{er} janvier 2019, le propriétaire d'un appartement a fixé à 650 euros le montant des loyers mensuels pour l'année 2019. Chaque 1^{er} janvier, le propriétaire augmente de 1,52 % le loyer mensuel.
On modélise l'évolution du montant des loyers mensuels par une suite (u_n).
L'arrondi à l'unité à l'unité du terme u_n représente le montant, en euros, du loyer mensuel fixé le 1^{er} janvier (2019+n), pour n entier naturel. Ainsi $u_0=650$ euros.

1.a. Calculer le montant du loyer mensuel fixé le 1^{er} janvier 2020.

1.b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison et son premier terme.

1.c. Calculer le montant du loyer mensuel qui, selon ce modèle, sera fixé pour l'année 2027.

2. Pour calculer la somme totale des loyers perçus par le propriétaire durant les années 2019 à (2019+A), on utilise la fonction ci-dessous écrite en langage Python.

```
def somme(A):
  S=0
  n=0
  while n<=A:
    S=S+7800*1.0152**n
    n=n+1
  return S
```

L'exécution de ce programme pour quelques valeurs de A donne les résultats suivants :

```
>>> somme(0)
7800,0
>>> somme(1)
15718,560000000001
>>> somme(2)
23757,482112000005
>>> somme(3)
31918,595840102407
>>> somme(8)
74623,04180934158
```

2.a. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, le résultat obtenu lors de l'appel somme(1).

2.b. Déterminer la somme totale des loyers perçus par le propriétaire durant les années 2022 à 2027 incluses.
On arrondira le résultat à l'unité.

CORRECTION

1.a. Le montant du loyer mensuel augmente an 1^{er} janvier 3020 de 1,52 %.

Le montant du loyer mensuel au 1^{er} janvier 2020 est égal à ;

$650+650\times\frac{1{,}52}{100}=650\times1{,}0152=659{,}88$.

On arrondit le montant du loyer mensuel à l'unité donc le montant du loyer au 1^{er} janvier 2020 est : 660 € .

1.b. u_n est le montant du loyer mensuel non arrondi au 1^{er} janvier (2019+n).

u_{n+1} est le montant du loyer mensuel non arrondi au 1^{er} janvier (2019+n+1).

u_{n+1} est égal à u_n augmenté de 1,52 % de u_n .

$u_{n+1}=u_n+\frac{1{,}52}{100}=1{,}0152\,u_n$

$u_0=650$

Donc (u_n) est la suite géométrique de raison $q=1{,}0152$ et de premier terme $u_0=650$.

1.c. Pour tout entier naturel n, $u_n=u_0\times q^n=650\times1{,}0152^n$

$2027-2019=8$ $\qquad u_8=650\times1{,}0152^8=733{,}375...$

Le montant du loyer au 1^{er} janvier 20207 sera de 733€.

2.a. 7800 est le montant du loyer annuel pour l'année 2019.

somme(1)=15 718,56…

somme(1) est la somme du montant du loyer annuel pour l'année 2019 et du montant du loyer annuel de l'année 2019 augmenté de 1,52 %.

Si on arrondit à l'unité on obtient : 15 719.

Or le montant du loyer annuel pour l'année 2020 est : $660\times12=7920$.

La somme du montant des loyers annuels pour les années 2019 et 2020 est : $7800+7920=15720$.

Ce résultat diffère d' un euro avec l'arrondi à l'unité de somme(1).

Donc la fonction écrite en langage Python ne permet pas de calculer le montant exact perçu par le propriétaire durant les années 2019 à 2019+A.

On peut finir autrement la fonction somme(A).

```
def somme(A):
    S=0
    n=0
    M=650
    while n<=A:
        M=650*1.0152**n
        C=round(M)
        S=S+12*C
        n=n+1
    return S
```

L'exécution du programme pour quelque valeur de A donne les résultats suivants :

```
>>> somme(0)
7800
>>> somme(1)
15720
>>> somme(2)
23760
>>> somme(3)
31920
>>> somme(8)
74616
```

2.b. somme(2) est la somme des montants des loyers annuels des années 2019 à 2021.
somme(8) est la somme des montants des loyers annuels des années 2019 à 2020.
somme(8) – somme(2) est la somme des montants des loyers des années 2022 à 2027.
$74616-23760=50856$.
Si on considère la fonction de l'énoncé on obtient :
$74623-23757=50866$.
Il y a une différence de 10 euros.