Sujet 53

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1
L'équation $2x^2-8x+6=0$ admet deux solutions. Leur somme S et leur produit P sont :

A)	B)	C)	D)
S= - 8 P= 6	S= - 8 P= 9	S= 4 P= 3	S= 3 P= - 4

Question 2
α est un nombre réel tel que $\sin(\alpha)=0{,}5$. On a alors :

A)	B)	C)	D)
sin(π-α)=0.5	sin(π-α)= - 0.5	sin(π-α)= $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	sin(π-α)= $\frac{\pi}{6}$

Question 3
Dans un repère orthonormé du plan, on considère le cercle d'équation : $(x-3)^2+(y+0{,}5)^2=\frac{25}{4}$

On peut affirmer que :

A)	B)	C)	D)
ce cercle a un rayon de 6.25	ce cercle passe par le point R(5;-2)	le centre du cercle a pour coordonnées (-3;0.5)	aucune des réponses A), B) et C) n'est correcte

Question 4
Dans un repère orthonormé du plan, une équation de la droite passant par le point A(2;-4) et de vecteur normal $\vec{n}(5;6)$ est :

A)	B)	C)	D)
6x-5y-32=0	6x+5y+8=0	5x+6y+14=0	5x+6y-14=0

Question 5

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(2x+3)e^x$.

La fonction de dérivée de la fonction f est notée f’/

On a alors :

A)	B)	C)	D)
$f'(x)=2e^x$	$f'(x)=(2x+3)e^x$	$f'(x)=(2x+1)e^x$	$f'(x)=(2x+5)e^x$

CORRECTION

Question 1 C

Justification non demandée

Si l'équation $a x^2+b x+c=0$ (avec $a\neq 0$) admet deux solutions alors leur somme est égale à $S=-\frac{b}{a}$ et leur produit est égal à $\frac{c}{a}$.

Pour l'exemple : $S=\frac{8}{2}=4$ et $P=\frac{6}{2}=3$.

Remarque : Les deux solutions de l'équation sont 1 et 3.

Question 2 A

Justification non demandée

Pour tout nombre réel x $\sin(\pi-x)=\sin x$ donc $\sin(\pi-\alpha)=0{,}5$.

Question 3 B

Justification non demandée

$(x-3)^2+(y+0{,}5)^2=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ équation cartésienne du cercle de centre I(3;-0,5) et de rayon $r=\frac{5}{2}=2{,}5$.

Les affirmations A et C sont fausses.

R(5;-2) $(5-3)^2+(-2+0{,}5)^2=2^2+(-1{,}5)^2=4+2{,}25=6{,}25=\frac{25}{4}$.

L'affirmation B est vraie.

Question 4 C

Justification non demandée

M(x;y) appartient à la droite passant par $A(2;-4)$ et de vecteur normal $\vec{n}(5;6)$ si et seulement si :

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y+4 \end{pmatrix}$ $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 5\times(x-2)+6\times(y+4)=0 \Leftrightarrow 5x-10+6y+24=0 \Leftrightarrow 8x+6y+14=0$

Question 5 D

Justification non demandée

$(e^x)'=e^x$ $(2x+3)'=2$

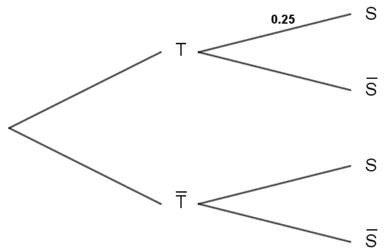
$f'(x)=2e^x+(2x+3)e^x=(2x+5)e^x$

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise fabrique des jeux en bois.
Avant sa commercialisation, chaque jouet est soumis à deux contrôles : un contrôle de peinture et un contrôle de solidité.
Après un grand nombre de vérifications, on constate que :
. 8 % des jeux ont un défaut de peinture.
. Parmi les jeux qui n'ont pas de défaut de peinture, 5 % ont un défaut de solidité.
. 2 % des jeux présente les deux défauts.
On choisit au hasard un jeu parmi ceux fabriqués par l'entreprise. On note :
. T l'événement : « le jeu a un défaut de peinture »
. S l'événement ; « le jeu a un défaut de solidité ».

1. Démontrer que $P_T(S)=0{,}25$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré de probabilités ci-dessous traduisant les données de l'exercice.



3. Démontrer que la probabilité que le jeu choisi au hasard n'ait pas de défaut de solidité est égale à 0,934.

4. Les jeux qui présentent un défaut de solidité sont détruits. Dans cette question, on leur attribuera un prix de vente de 0 €.
Les jeux ne présentant aucun défaut sont vendus 14 € chacun.
Les autres jeux sont vendus 9 €.
On note X la variable aléatoire qui donne le prix de vente, en euros, d'un jeu.

4.a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, donnant, pour chaque valeur x_i de X, la probabilité de l'événement $\{X=x_i\}$.

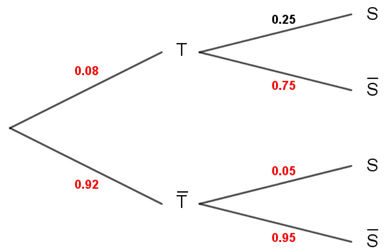
x_i	0	9	14
$P(X=x_i)$			

4.b. Quel est le prix de vente moyen d'un jeu fabriqué par cette entreprise.
On arrondira le résultat au centième d'euro.

CORRECTION

1. 2 % des jeux ont les deux défauts donc $P(T\cap S)=0{,}02$.
$P(T\cap S)=P(T)\times P_T(S)$
8 % des jeux ont un défaut de peinture donc $P(T)=0{,}08$.
$0{,}02=0{,}08\times P_T(S) \quad \Leftrightarrow \quad P_T(S)=\dfrac{0{,}02}{0{,}08}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}=0{,}25$

2. $P(\overline{T})=1-P(T)=1-0{,}08=0{,}92$
$P_T(S)=0{,}25$ donc $P_T(\overline{S})=1-0{,}25=0{,}75$
Parmi les jeux qui n'ont pas de défaut de peinture , 2 % ont un défaut de solidité donc $P_{\overline{T}}(S)=0{,}05$.
Et $P_{\overline{T}}(\overline{S})=1-0{,}05=0{,}95$.
On obtient l'arbre pondéré suivant :



3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :
$P(S)=P(T\cap S)+P(\overline{T}\cap S)=0{,}02+P(\overline{T})\times P_{\overline{T}}(S)=0{,}02+0{,}92\times 0{,}05=0{,}02+0{,}046=0{,}066$
$P(\overline{S})=1-P(S)=1-0{,}066=0{,}934$

4.a. $P(X=0)=P(S)=0{,}066$
$P(X=14)=P(\overline{T}\cap\overline{S})=P(\overline{T})\times P_{\overline{T}}(\overline{S})=0{,}92\times 0{,}95=0{,}874$
$P(X=9)=P(T\cap\overline{S})=P(T)\times P_T(\overline{S})=0{,}08\times 0{,}75=0{,}06$

x_i	0	9	14
$P(X=x_i)$	0.066	0.06	0.874

4.b. Le prix de vente moyen est égal à l'espérance mathématique de X.
$E(X)=9\times 0{,}06+14\times 0{,}874=12{,}776$
le prix de vente moyen d'un jouet est égal à 12,78 € au centième près.

EXERCICE 3 (5 points)

L'évolution d'une population de bactéries dépend de l'environnement dans lequel ces bactéries sont placées. Cette population peut-être modélisée par la suite (P_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$P_{n+1}=(1+\alpha)P_n+\beta$ où α ou β sont des paramètres liés à l'environnement , notamment à la température et à l'humidité.
P_n modélise alors le nombre de bactéries, en milliers, qui composent n jours après les avoir introduites dans un certain environnement.

1. Une population, initialement composée de 500 mille bactéries, est étudiée dans un environnement pour lequel $\alpha=0{,}2$ et $\beta=70$.

1.a. Combien y-a-t-il de bactéries dans cet environnement au bout de deux jours ?

1.b. Recopier et compléter le programme suivant, écrit en langage Python, pour que la fonction Nombrebacteries renvoie le nombre de bactéries présentes dans cet environnement au bout de N jours.

```
def Nombrebacteries(N):
  P=500
  for i in range(0,N):
    P = . . .
  return . . .
```

2. Une autre population, initialement composée de 200 mille bactéries, est étudiée dans un nouvel environnement. On constate que le nombre de bactéries de cette population augmente de 9 % par jour.

2.a. Déterminer les valeurs de α et β pour cet environnement.

2.b. Quelle est,dans ce cas, la nature de la suite (P_n) ?

2.c. Justifier qu'après 9 jours dans cet environnement, le nombre de bactéries de cette population a doublé.

CORRECTION

1.a. Pour tout entier naturel n :

$P_{n+1}=(1+0,2)\times P_n+70=1,2\times P_n+70$

$P_1=1,2\times 500+70=670$

$P_2=1,2\times 670+70=804+70=874$

Au bout de 2 jours il y a 874 mille bactéries dans l'environnement.

1.b. On complète le tableau.

```
def Nombrebacteries(N):
  P=500
  for i in range(0,N):
    P =1.2*P+70
  return P
```

2.a. Pour tout entier naturel n

$P_{n+1}=P_n+\frac{9}{100}\times P_n=(1+0,09)\times P_n=1,09\times P_n$

donc $\alpha=0,09$ et $\beta=0$

2.b. $P_0=500$

Pour tout entier naturel n : $P_{n+1}=1,09\,P_n$.

La suite (P_n) est la suite géométrique de premier terme $P_0=500$ et de raison $q=1,09$.

2.c. Pour tout entier naturel n : $P_n=P_0\times q^n=500\times 1,09^n$.

$P_9=500\times 1,09^9$

$1,09^9=2,17$ au centième près donc $1,09^9>2$.

Le nombre de bactéries a doublé en 9 jours.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=3xe^{-0,4x}$.
La fonction dérivée de la fonction f est notée : f'.
On admet que la fonction f' a pour expression $f'(x)=(-1,2x+3)e^{-0,4x}$.

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

2. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

3. Un sportif pris un produit dopant. La fonction f modélise la quantité, en mg/L, de ce produit dopant présent dans le sang du sportif x heures après la prise.

3.a. Pourquoi peut-on affirmer que ce produit dopant n'est pas naturellement présent dans l'organisme du sportif ?

3.b. Combien de temps après son absorption, ce produit dopant sera-t-il présent en quantité maximale dans le sang du sportif.

3.c. Le sportif absorbe ce produit dopant au début d'une séance d'entraînement.
Le même jour, 6 heures après le début de cette séance d'entraînement, il est soumis à un contrôle antidopage. Celui-ci se révélera positif si la quantité de produit dopant présent dans l'organisme de ce sportif dépasse ; 1,4 mg/L.
Ce contrôle anti dopage sera-t-il positif ? Justifier.

CORRECTION

1. Remarque

$\left(e^{-0,4x}\right)' = -0,4e^{-0,4x}$ $\qquad (3x)' = 3$

donc $f'(x) = 3e^{-0,4x} + 3x\left(-0,4e^{-0,4x}\right) = 3e^{-0,4x} - 1,2xe^{-0,4x} = (-1,2x+3)e^{-0,4x}$

. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, $e^{-0,4x} > 0$ donc le signe $f'(x)$ est le signe de $(-1,2x+3)$.

$$-1,2x+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3=1,2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{1,2}=x \quad \Leftrightarrow \quad x=2,5$$

$$-1,2x+3<0 \quad \Leftrightarrow \quad 3<1,2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{1,2}<x \quad \Leftrightarrow \quad 2,5<x$$

$$-1,2x+3>0 \quad \Leftrightarrow \quad 3>1,2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{1,2}>x \quad \Leftrightarrow \quad 2,5>x \ (\geqslant 0)$$

2. $f(0)=0$ $\qquad f(2,5) = 7,5\times e^{-1} = \frac{7,5}{e} = 2,76$ au centième près

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-0,4x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

x	0		2.5		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	
f(x)	0	$\nearrow$	$\frac{7.5}{e}$	$\searrow$	0

3.a. On a $f(0)=0$ donc le produit dopant n'est pas naturellement présent dans l'organisme du sportif.

3.b. f est maximale pour $x=2,5$.
Le produit dopant sera présent en quantité maximale dans le sang du sportif au bout de 2h 30min.

3.c. 6 heures après avoir absorbé le produit dopant, la quantité du produit dans le sang du sportif sera f(6) mg/L
$f(6) = 18e^{-2,4} = 1,63 \text{ mg/L}$ au centième près.
$1,63 > 1,4$ donc le contrôle antidopage sera positif.