Sujet 54

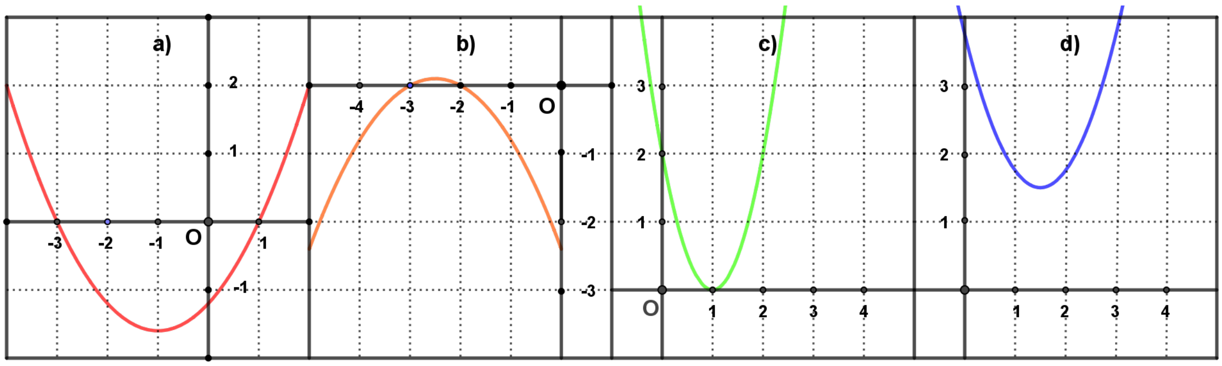
EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Si $\sin x = \frac{1}{3}$ alors :

a) $sin(x+\pi) = -\frac{1}{3}$	b) $sin(x+\pi) = \frac{1}{3}$	c) $cos x = \frac{1}{3}$	d) $sin(x+15\pi) = \frac{1}{3}$

2. Parmi les paraboles ci-dessous laquelle représente une fonction qui n'admet pas de racine ?



3. La fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a) 1	b) 3	c) -1	d) 0

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M(x;y) tels que $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 2 = 0$ est :

a) une parabole	b) le cercle de centre Ω de coordonnées (-1;3) et de rayon 8	c) le cercle de centre Ω de coordonnées (1;-3) et de rayon $2\sqrt{2}$	d) une droite

5. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X donnant le gain en euros , d'un joueur, à un jeu est donnée par le tableau suivant :

x_i	-10	6	10
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

Sur un grand nombre d'épreuves, le gain moyen que peut espérer le joueur est :

a) 3.5 euros	b) 4 euros	c) 2 euros	d) 6 euros

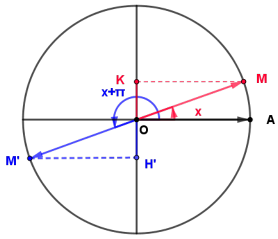
CORRECTION

1. **a)**

Justification non demandée

Pour tout nombre réel x : $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$ car :

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})=x+2k\pi$ $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM'})=x+\pi+2k\pi$ M et M' sont diamétralement opposés.



2. **d)**

Justification non demandée

La seule parabole ne coupant pas l'axe des abscisses est la parabole **d).**

3. **b)**

Justification non demandée

f est dérivable sur $]0;+\infty[$, le coefficient direcreur de la tangente au point d'abscisse 1 est égal à $f'(1)$.

Or $f'(x)=2+\frac{1}{x^2}$ donc $f'(1)=2+\frac{1}{1^2}=3$.

4. **c)**

Justification non demandée

$x^2-2x+y^2+6y+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+3)^2-9+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=8$.

Équation du cercle de centre de coordonnées (1;-3) et de rayon $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

5. **a)**

Justification non demandée

Le gain moyen que peut espérer le joueur est égal à l'espérance mathématique de la variable X.

$E(X)=-10\times\frac{1}{4}+6\times\frac{3}{8}+10\times\frac{3}{8}=\frac{-20+18+30}{5}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}=3{,}5$

EXERCICE 2 (5 points)

Le directeur d'une maternité en milieu rural a enregistré 900 accouchements entre le 1er janvier 2019 et le 31 décembre 2019.
Depuis déjà 10 ans ; il constate que le nombre d'accouchements baisse d'environ 4 % chaque année par rapport à l'année précédente.
En supposant que cette diminution se poursuivre avec ce même taux les prochaines années, il modélise le nombre d'accouchements de cette maternité pour l'année $2019+n$ à l'aide du $n^{\text{ième}}$ terme d'une suite (u_n). Il a ainsi $u_0=900$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2. On considère la fonction Suite ci-dessous en langage Python :

```
def Suite(n):
  u=500
  for i in range(1,n+1):
    u=0.96*u
  return u
```

Quelle sera la valeur obtenue pour Suite(5) ?

3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

4. Le directeur sait que la maternité devra fermer dès que le nombre d'accouchements deviendra inférieur à 600.
Avec ce modèle, la maternité la maternité sera-t-elle fermée en 2030 ? Justifier.

5. Selon ce modèle, en quelle année la maternité fermera -t-elle ses portes ?

CORRECTION

1. Le nombre d'accouchements baisse de 4%chaque année par rapport à l'année précédente.
u_n est le nombre d'accouchements pendant l'année 2019+n.
u_{n+1} est le nombre d'accouchements pendant l'année 2019+n+1.
On a donc $u_{n+1}=u_n-\frac{4}{100}\times u_n=(1-0{,}04)u_n=0{,}96\,u_n$
(u_n) est une suite géométrique de raison $q=0{,}96$.

2. On obtiendra u_5 .
Si on exécute le programme Python, on obtient 734 arrondi à l'unité.

3. Pour tout entier naturel n :
$u_n=u_0\times q^n=900\times 0{,}96^n$

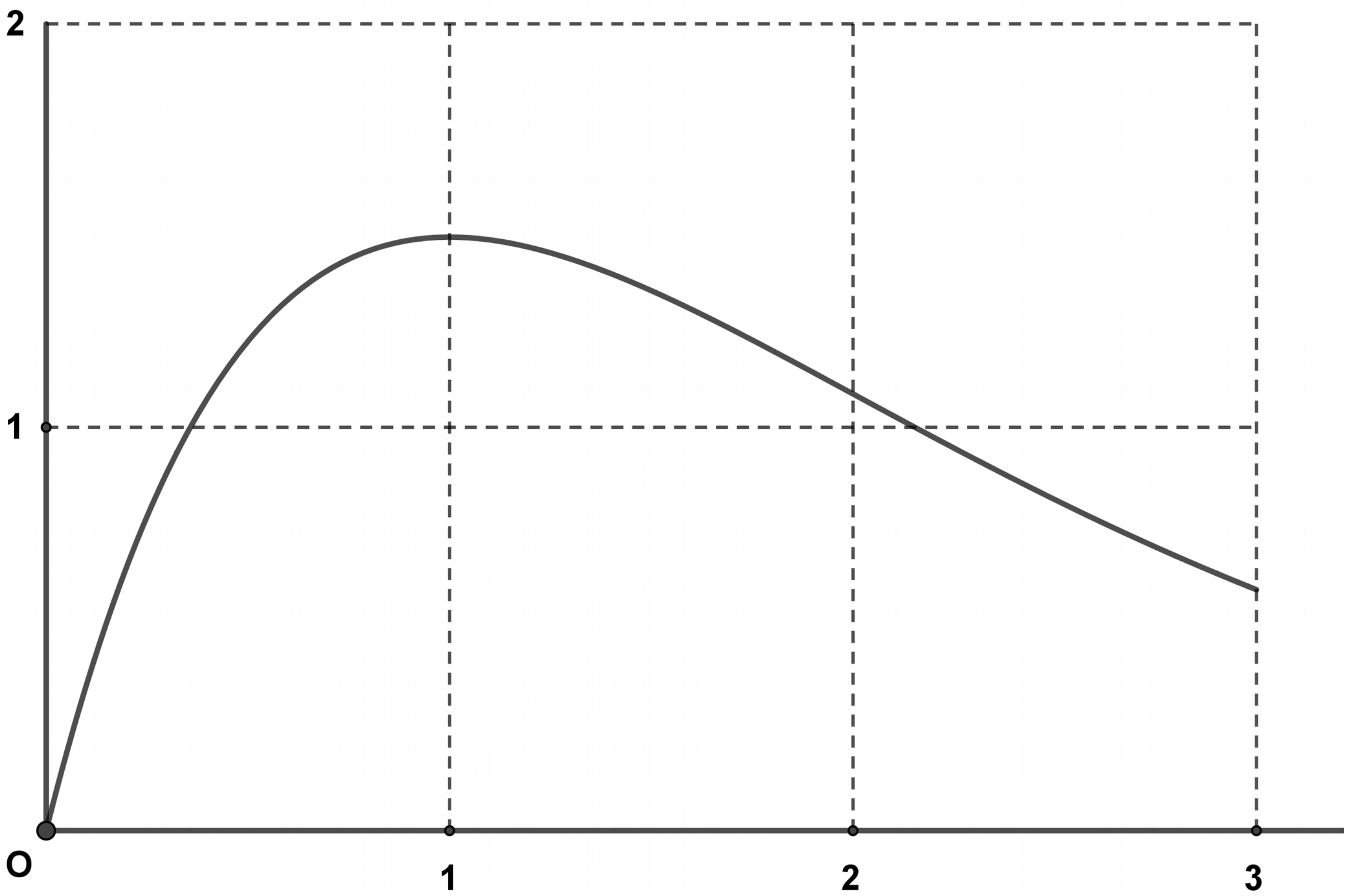
4. $2030=2019+11$ donc $n=11$
$u_{11}=900\times 0{,}96^n=574$ à l'unité près.
$574<600$ donc la maternité sera nécessairement fermée à la fin de l'année 2030.
Si $u_{10}>600$ alors la maternité ne saura pas fermée pendant l'année 2030 par contre si $u_{11}<600$ alors la maternité sera fermée toute l'année 2030.

5. En utilisant la calculatrice :
$u_{10}=598<600$ arrondi à l'unité
$u_9=623>600$ arrondi à l'unité
La suite (u_n) est décroissante.
Donc 2019+10=2029 sera la première année pour laquelle le nombre d'accouchements sera inférieur à 600.
La maternité sera fermée le 1^{er} janvier 2029+1=2030.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit la fonction f définie sur [0;3] par $f(x)=4xe^{-x}$.

1. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f dans un repère d'origine O.



Conjecturer une valeur approchée du maximum de f sur [0;3].

2. La fonction f est dérivable sur [0;3].
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle [0;3], $f'(x)=4(1-x)e^{-x}$

3. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur [0;3].

4. En déduire le tableau de variation de f sur [0;3], puis la valeur exacte du maximum de f sur [0;3].

CORRECTION

1. Par lecture graphique , f est maximale pour x=1 et 1,5 est une valeur approchée du maximum.

2. $f(x)=4xe^{-x}$

$(e^{-x})'=-e^{-x}$ $\quad (4x)'=4$

$f'(x)=4e^{-x}+4x(-e^{-x})=(4-4x)e^{-x}=4(1-x)e^{-x}$

3. Pour tout x de l'intervalle [0;3], $e^{-x}>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (1-x).

$1-x=0 \Leftrightarrow x=1$

$1-x>0 \Leftrightarrow 1>x \ (\geqslant 0)$

$1-x<0 \Leftrightarrow 1<x \ (\leqslant 3)$

On donne le signe de $f'(x)$ sous la forme d'un tableau.

x	0		1		3
f '(x)		+	0	–	

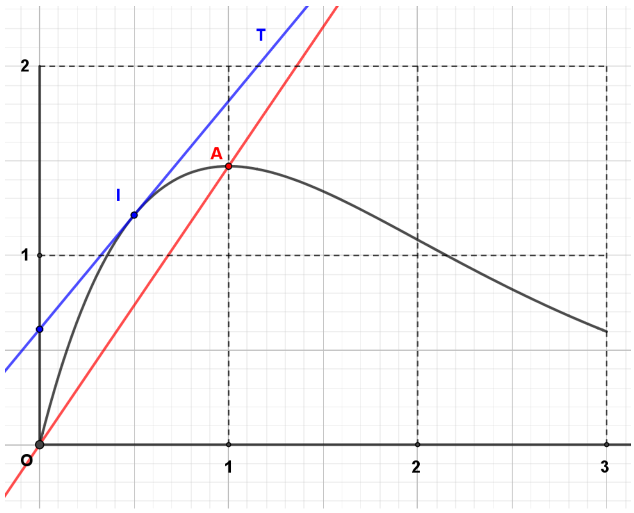
4. Tableau de variation de f.

x	0		1		3
f '(x)		+	0	–	
f(x)	f(0)	↗	f(1)	↘	f(3)

$f(0)=0 \qquad f(3)=12e^{-3}=0{,}60$ au centième près.

Le maximum de f sur [0;3] est $f(1)=4e^{-1}$ = 1,47 au centième près.

5.



Le coefficient directeur de la droite (OA) est $a=\dfrac{y_A-y_O}{x_A-x_O}=\dfrac{4e^{-4}-0}{1-0}=4e^{-1}=1{,}47$ au centième près.

Le coefficient directeur de la tangente T au point I d'abscisse 0,5 est : $f'(0{,}5)=4(1-0{,}5)e^{-1}=2e^{-0{,}5}$

$f'(0{,}5)=1{,}21$ au centième près.

Le coefficient directeur de la droite (OA) est supérieur au coefficient directeur de la tangente T.

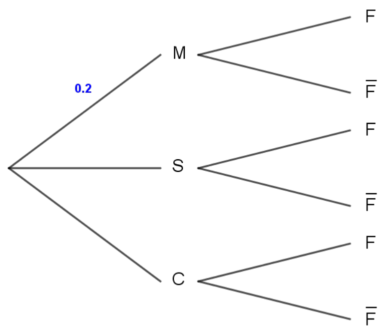
EXERCICE 4 (5 points)

150 élèves d'un établissement sont inscrits aux activités du midi :
- 30 sont inscrits en musique.
- 45 sont inscrits en sport.
- 75 sont inscrits en cinéma.

Chaque élève pratique une seule activité.
Parmi les élèves inscrits en musique, 30 % sont des filles.
Parmi les élèves inscrits en sport, 60 % sont des filles.
Parmi les élèves inscrits en cinéma, 72 % sont des filles.

On choisit au hasard un élève inscrit aux activités du midi.
On note : F l'événement ; « l'élève choisi est une fille »
M l'événement : « l'élève choisi est inscrit en musique »
S l'événement : « l'élève choisi est inscrit en sport »
C l'événement ; « l'élève choisi est inscrit en cinéma ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant la situation.



2. Calculer la probabilité que l'élève choisi soit une fille inscrite en musique.

3. Montrer que la probabilité que l'élève choisi soit une fille est égale à 0,6.

4. Les événements M et F sont-ils indépendants ?

5. Sachant que l'élève choisi est un garçon. Calculer la probabilité qu'il soit inscrit en cinéma.

CORRECTION

1. 30 élèves sur 150 sont inscrits en musique.

Donc $P(M)=\frac{30}{150}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

45 élèves sur 150 sont inscrits en sport.

Donc $P(S)=\frac{45}{150}=\frac{3}{10}=0{,}3$.

75 élèves sur 150 sont inscrits en cinéma.

Donc $P(C)=\frac{75}{150}=\frac{1}{2}=0{,}5$.

Parmi les élèves inscrits en musique, 30 % sont des filles.

Donc $P_M(F)=0{,}3$ et $P_M(\bar{F})=1-0{,}3=0{,}7$.

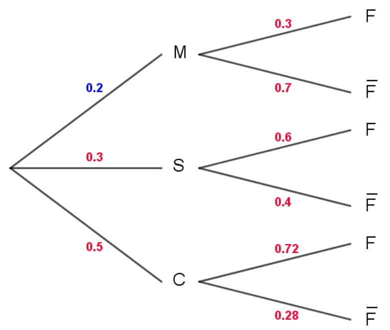
Parmi les élèves inscrit en sport, 60 % sont des filles.

Donc $P_S(F)=0{,}6$ et $P_S(\bar{F})=1-0{,}6=0{,}4$.

Parmi les élèves inscrits en cinéma, 72 % sont des filles.

Donc $P_C(F)=0{,}72$ et $P_C(\bar{F})=1-0{,}75=0{,}28$.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. On nous demande de calculer $P(M\cap F)$

$P(M\cap F)=P(M)\times P_M(F)=02\times 0{,}3=0{,}06$.

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$P(F)=P(M\cap F)+P(S\cap F)+P(C\cap F)=0{,}06+P(S)\times P_S(F)+P(C)\times P_C(F)$

$P(F)=0{,}06+0{,}3\times 0{,}6+0{,}5\times 0{,}72=0{,}06+0{,}18+0{,}36=0{,}6$.

4. $P(M\cap F)=0{,}06$ $\qquad P(M)\times P(F)=0{,}2\times 0{,}6=0{,}12$

Donc $P(M\cap F)\neq P(M)\times P(F)$ les événements M et F ne sont pas indépendants.

5. On nous demande de calculer $P_{\bar{F}}(C)$

$P(\bar{F})=1-P(F)=1-0{,}6=0{,}4$ $\qquad P(C\cap\bar{F})=P(C)\times P_C(\bar{F})=0{,}5\times 0{,}28=0{,}14$

$P_{\bar{F}}(C)=\frac{P(C\cap\bar{F})}{P(\bar{F})}=\frac{0{,}15}{0{,}4}=0{,}035$.