Sujet 55

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

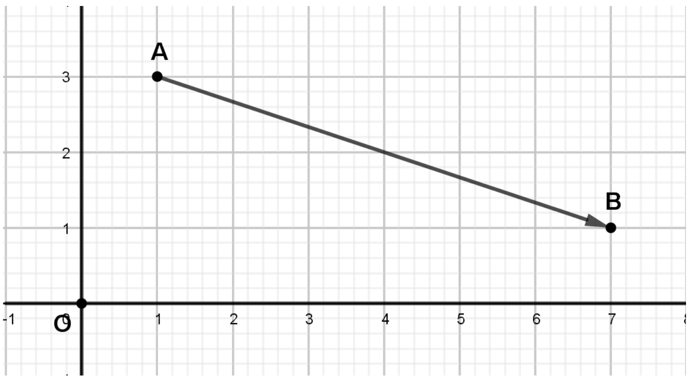
Question 1
Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse O est :

a) y=x+1	b) y=ex	c) $y = e^x$	d) y=x-1

Question 2
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-2x+6}$ admet pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f'(x) = e^{-2x+6}$	b) $f'(x) = -2e^{-2x+6}$
c) $f'(x) = -2xe^{-2x+6}$	d) $f'(x) = (-2x+6)e^{-2x+6}$

Question 3
Dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représenté ci-dessous est égal à :



a) $-2\vec{i}+6\vec{j}$	b) $-6\vec{i}+2\vec{j}$	c) $2\vec{i}-6\vec{j}$	d) $6\vec{i}-2\vec{j}$

Question 4
On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\sin x-\cos x$.
Parmi les quatre propositions suivantes, une seule est correcte. Laquelle ?

a) f est une fonction paire	b) f est une fonction impaire
c) f n'est ni paire ni impaire	d) f(o)=0

Question 5
Dans le plan muni d'un repère, on considère la droite (d) d'équation : $5x-2y+8=0$, la droite (d) a pour (d) a pour coefficient directeur :

a) $\vec{u}(2;5)$	b) $\frac{5}{2}$	c) $\frac{2}{5}$	d) -2

CORRECTION

Question 1 : **a)**

Justification non demandée

$f(x)=e^x$ donc $f(0)=e^0=1$ $\qquad f'(x)=e^x$ donc $f'(0)=1$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle est :

$y-1=1\times(x-0) \iff y=x+1$

Question 2 : **b)**

Justification non demandée

Pour tout nombre réel x :

$f(x)=e^{u(x)}$ avec $u(x)=-2x+6$

$f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$ $\qquad u'(x)=-2$

donc $f'(x)=-2e^{-2x+6}$

Question 3 : **d)**

Justification non demandée

A(1;3) B(7;1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{AB}=6\vec{i}-2\vec{j}$

Question 4 : **c)**

Justification non demandée

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc f n'est ni paire ni impaire.

Question 5 : **b)**

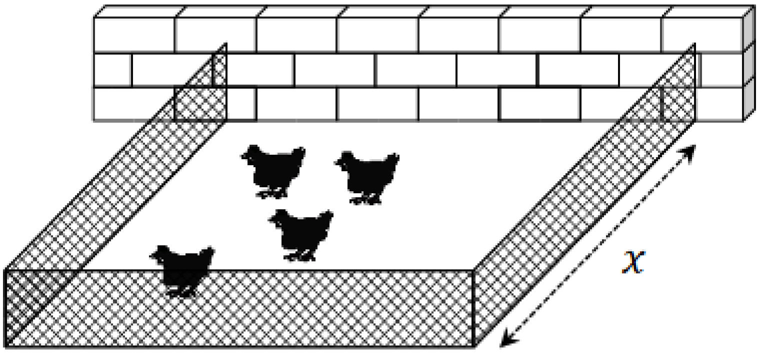
Justification non demandée

(d) : $5x-2y+8=0 \iff 5x+8=2y \iff y=\frac{5}{2}x+4$

donc le coefficient directeur de (d) est égal à $\frac{5}{2}$.

EXERCICE 2 (5 points)

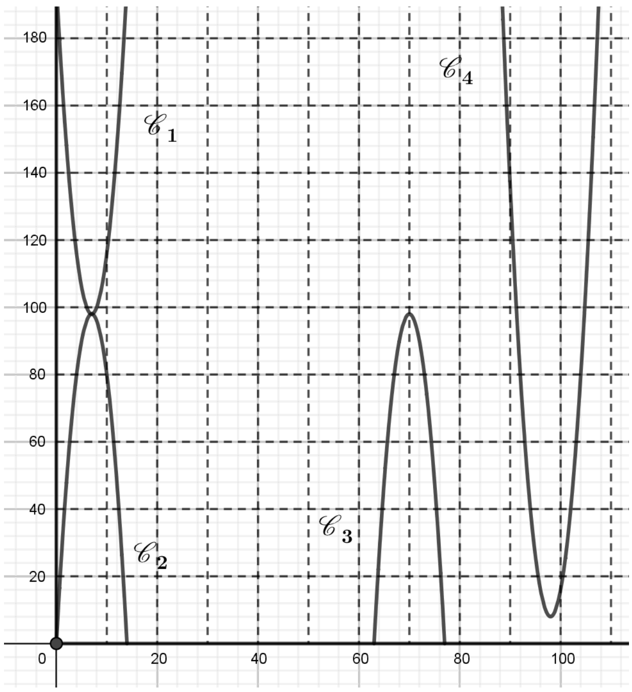
Un fermier souhaite réaliser un enclos rectangulaire pour des poules et des poussins, adossé à un mur afin d'économiser du grillage. Ainsi, il ne grillagera que 3 côtés de son enclos.
Il possède 28 mètres de grillage. Il souhaite construire un enclos d'aire maximale.
On appelle x la longueur du côté de l'enclos perpendiculaire au mur.



On appelle A la fonction qui à un nombre x associe A(x) l'aire de l'enclos.
La fonction A est ainsi définie sur l'intervalle [0;14].

1.a. Vérifier que l'aire $A(x) = -2x^2 + 28x$.
1.b. Montrer que la forme canonique de A(x) est $-2(x-7)^2 + 98$.

2. Quatre courbes ont été tracées sur le graphique ci-dessous. Identifier celle qui représente la fonction A.



3. Dresser le tableau de variation de la fonction A.

4. Pour quelle valeur de x l'aire de l'enclos est-elle maximale ?
Donner la valeur de cette aire.

CORRECTION

1.a. Le périmètre de l'enclos grillagé est 28 m, 2 côtés de x mètres et 1 côté de $28-2x$ mètres.
L'aire en mètre carré de l'enclos rectangulaire est :
$A(x)=x\times(28-2x)=-2x^2+28x$.

1.b. $A(x)=-2[x^2-14x]=-2[(x-7)^2-49]=-2(x-7)^2+98$.

2. On remarque que $A(0)=0$ donc la courbe représentative de A passe par l'origine. Sur le graphique, la seule courbe passant par l'origine est la courbe $\mathscr{C}_2$.
$\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de A.

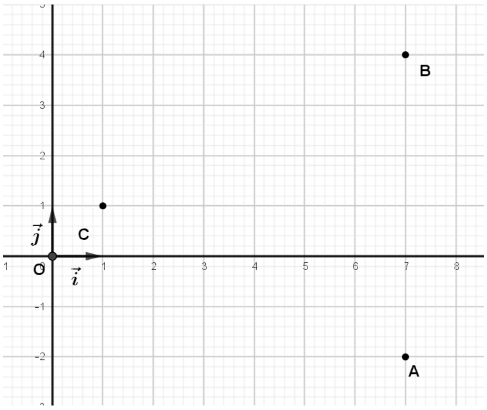
3. A est dérivable sur [0;14]
$A'(x)=-4x+28$
$-4x+28=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x=28 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{28}{4}=7$
$-4x+28>0 \quad \Leftrightarrow \quad 28>4x \quad \Leftrightarrow \quad 7>x$
$-4x+28<0 \quad \Leftrightarrow \quad 28<4x \quad \Leftrightarrow \quad 7<x$
$A(0)=0$ et $A(14)=-2\times14^2+28\times14=0$ et $A(7)=98$ (en utilisant la forme canonique).
<u>Tableau de variation de A</u>

x	0		7		14
A'(x)		+	0	−	
A(x)	0	↗	98	↘	0

4. L'aire de l'enclos est maximale pour $x=7$ et cette aire maximale est égale à : $98\ \text{m}^2$.

EXERCICE 3 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On considère les points A, B et C de coordonnées $A(7;-2)$, $B(7;4)$ et $C(1;1)$.



1. Montrer que $y=1$ est une équation de la droite (d_1) passant par C et perpendiculaire à (AB).

2. Que représente cette droite pour le triangle ABC ?

3. Donner une équation de la droite (d_2) hauteur du triangle ABC issue du sommet B.

4. On appelle H le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).
Donner en justifiant la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}$.

CORRECTION

1. Le vecteur $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d_1) d'équation : $y=1$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

$\vec{i}.\overrightarrow{AB}=1\times 0+0\times 6=0$ donc les droites (d_1) et (AB) sont perpendiculaires.

C(1;1) appartient à la droite (d_1) donc la droite (d_1) est la droite passant par C et perpendiculaire à (AB).

2. La droite (d_1) est la hauteur du triangle ABC issue de C.

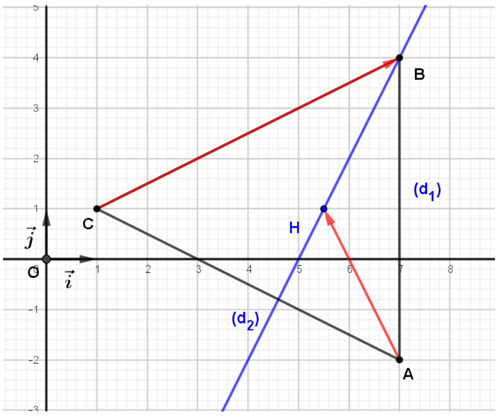
3. (d_2) est la droite passant par B(7;4) et de vecteur normal : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$.

(d_2) : $-6x+3y+c=0$

B(7;4) appartient à (d_2) donc $-6\times 7+3\times 4+c=0 \Leftrightarrow -42+12+c=0 \Leftrightarrow c=30$

(d_2): $-6x+3y+30=0 \Leftrightarrow -2x+y+10=0 \Leftrightarrow y=2x-10$

4. Le point d'intersection H de (d_1) et (d_2) est l'orthocentre du triangle ABC donc la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue de A donc les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires donc : $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$.



EXERCICE 4 (5 points)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total. Pour l'ouverture prévue le 1^{er} janvier 2020, la médiathèque dispose de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque, augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, le bibliothécaire est chargé de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre ,en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2020+n).
On donne $u_0=42$.

1. Justifier que , pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=u_n\times 0,95+6$.

2. On propose ci-dessous un programme en langage Python :

```
def Suite(n):
  u=42
  for i in range(n):
    u=0.95*u+6
  return u
```

Expliquer ce que permet de déterminer ce programme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse , elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.

1. On admet que $v_{n+1}=0,95\times v_n+4$ pour tout entier naturel $n\geqslant 0$ avec $v_0=42$.
On considère la suite (w_n) définie pour entier naturel n, par $w_n=v_n-80$.

1.a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q=0,95$ et préciser son premier terme w_0 .

1.b. En déduire l'expression de w_n puis de v_n en fonction de n.

2. On donne ci-dessous un programme en langage Python :

```
def objet(A):
  v=41
  n=0
  while v<A:
    v=0.85*v+4
    n=n+1
  return n
```

L'appel à la fonction objet(70), renvoie 27.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

Partie A

1. Pour tout entier naturel n.

u_{n+1} est le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2020+n+1).

u_n est le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2020+n).

Tous les ans, on supprime 5 % d'ouvrages et on ajoute 6 000=6 milliers d'ouvrages neufs.

Donc $u_{n+1}=u_n-\frac{5}{100}u_n+6=(1-0{,}05)u_n+6=0{,}95\,u_n+6$

2. Ce programme, pour n donné , renvoie u_n .

On obtient pour n=10, en arrondissant au millième, $u_{10}=79{,}299$.

Il y aura 79 299 ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2020+10=2030).

Partie B

1. a. Pour tout entier naturel n , $w_n=v_n-80 \quad \Leftrightarrow \quad v_n=w_n+80$

$w_{n+1}=v_{n+1}-80=0{,}95\times v_n+4-80=0{,}95\times(v_n+80)-76=0{,}95\times(w_n+80)-76$

$w_{n+1}=0{,}95\,w_n+0{,}95\times 80-76=0{,}85\,w_n+74-74=0{,}95\,w_n$

(w_n) est la suite géométrique de raison $q=0{,}95$ et de premier terme $w_0=v_0-80=42-80=-38$

1.b. Pour tout entier naturel n :

$w_n=w_0\times q^n=-38\times 0{,}95^n$

$v_n=w_n+80=80-38\times 0{,}95^n$

2. 2020+27=2047 sera la première année année pour laquelle le nombre, en milliers ; d'ouvrages disponibles à la médiathèque sera supérieur ou égal à 70.

C'est à dire, il y aura au moins 70 000 ouvrages disponibles à la médiathèque.