Sujet 56

EXERCICE 1 (5points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

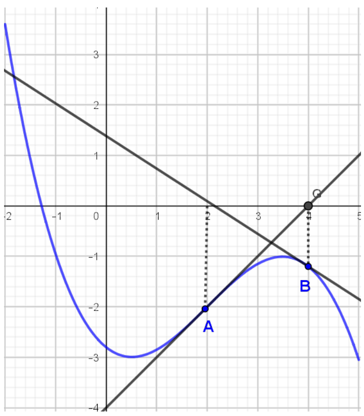
Question 1

a) Si le discriminant d'un polynône du second degré est strictement positif, alors ce polynôme admet 2 racines positives	b) Si le discriminant d'un polynôme du second degré est strictement négatif alors ce polynôme admet 2 racines négatiives	c) Si un polynôme du second degré est toujours strictement positif, alors ce polynôme n'admet pas de racine	d) Si le discriminant d'un polynôme du second degré est nul, alors ce polynôme admet le nombre 0 pour racine

Question 2

a) L'équation cosx= $-\frac{1}{2}$ admet 2 solutions dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$	b) L'équation cosx=$-\frac{1}{2}$ admet 1 solution dans l'intervalle[0;π[	c) L'équation sinx=$-\frac{1}{2}$ admet 1 solution dans l'intervalle [0;π[	d) L'équation sinx=$-\frac{1}{2}$ admet 2 solutions dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

Question 3
La courbe représentative d'une fonction f, définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels, est donnée ci-dessous avec ses tangentes aux points A et B d'abscisses respectives 2 et 4.
On note f′ la fonction dérivée de f.



a) f(0)=1	b) f '(2)=1	c) f '(2)=-2	d) f '(4)=0.5

Question 4

On considère la fonction g définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=x^3-0{,}0012\,x+1$

a) g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	b) g est croissante sur $\mathbb{R}$	c) g est constante sur l'intervalle [-0.02;0.02]	d) g est décroissante sur l'intervalle [-0.02;0.02]

Question 5

a) L'équation $(e^x)^2=1$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$	b) L'ensemble de définition de la fonction exponentielle est]0;+∞[	c) La fonction dérivée de la fonction x → e^{-x} est la fonction x → e^{-x}	d) L'ensembie de définition de la fonction exponentielle est $\mathbb{R}$

CORRECTION

Question 1 : c)

Justification non demandée

a) Si $\Delta>0$ alors le polynôme admet 2 racines non nécessairement positives.

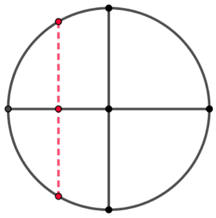
b) Si $\Delta<0$ alors le polynôme n'admet pas de racine.

c) Si pour tout nombre réel x $\mathrm{P}(x)>0$ alors le polynôme n'admet pas de racine (et le coefficient de x^2 est positif).

d) Si $\Delta=0$ alors le polynôme admet une racine double non nécessairement nulle.

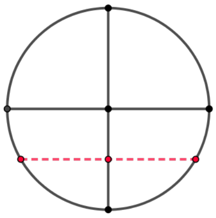
Question 2 : b)

Justification non demandée



a) $\cos x=-\frac{1}{2}$ n'admet pas de solution sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

b) $\cos x=-\frac{1}{2}$ admet une seule solution sur $[0;\pi[$



c) $\sin x=-\frac{1}{2}$ n'admet pas de solution sur $[0;\pi[$

d) $\sin x=-\frac{1}{2}$ admet une seule solution sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Question 3 : b)

Justification non demandée

a) L'ordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe (yy') est négative donc distincte de 1 et $\mathrm{f}(0)\neq 1$.

b) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 est positif donc $\mathrm{f}'(2)\neq -2$.

c) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4 est négatif donc $\mathrm{f}'(4)\neq 0{,}5$.

Conséquence

On a $\mathrm{f}'(2)=1$ réponse b)

(on peut aussi remarquer que la tangente au point A passe par les points de coordonnées (0;-4) et (4;0)).

Question 4 : d)

Justification non demandée

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x)=3x^2-0{,}001x^2-0{,}0004=3(x-0{,}02)(x+0{,}02)$

$g'(x)$ est un trinôme admettant deux racines distinctes $x_1=-0{,}02$ et $x_2=0{,}02$, le coefficient de x^2 est égal 3 > 0. Donc $g'(x)\leqslant 0 \Leftrightarrow x\in[-0{,}02;0{,}02]$ et g est décroissante sur [-0,02;0,02].

Question 5 : d)

Justification non demandée

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Lorsqu'il s'entraîne au tennis, Roger utilise un lance-balle.
Cette machine lance les balles soit sur le coup droit soit sur le revers du joueur.
On la remplit de balles et on la programme de la façon suivante ; deux tiers des balles seront lancées sur le coup droit du joueur, le reste sur son revers.
On s'intéresse à la réussite des frappes de Roger pendant une séance d'entraînement.
On note D l'événement : « le joueur reçoit la balle sur son coup droit ».
On note $\bar{D}$ l'événement contraire de D.
Roger réussit $\frac{9}{10}$ de ses coups droits et 75 % de ses revers.
On note S l'événement : « la frappe de Roger est un succès ».

1. Donner $P(\bar{D})$.

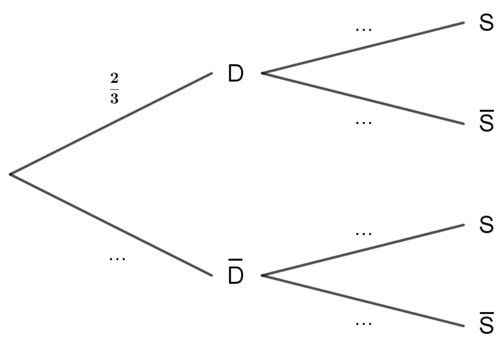
2. Compléter l'arbre pondéré situé en **annexe 1** représentant la situation.

3. Calculer $P(\bar{D} \cap S)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Montrer que la probabilité que la frappe de Roger soit un succès est égale à $0{,}85$.

5. Sachant que la frappe que vient de réaliser Roger est un succès, calculer la probabilité que ce soit un revers. Arrondir le résultat au centième.

ANNEXE 1



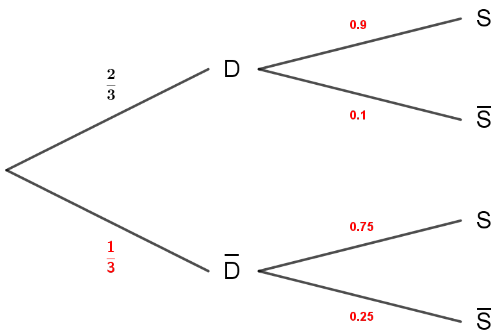
CORRECTION

1. $P(\bar{D})=1-P(D)=1-\frac{2}{8}=\frac{1}{3}$

2. Roger réussit $\frac{9}{10}$ de ses coups droits donc $P_D(S)=0,9$ et $P_D(\bar{S})=1-P_D(S)=1-0,9=0,1$.

Roger réussit 75 % de ses revers donc $P_{\bar{D}}(S)=075$ et $P_{\bar{D}}(\bar{S})=1-P_{\bar{D}}(S)=1-0,75=0,25$.

On complète l'arbre pondéré :



3. $P(\bar{D}\cap S)=P(\bar{D})\times P_{\bar{D}}(S)=\frac{1}{3}\times 0,75=0,25$ **.**

La probabilité que Roger reçoive la balle sur son revers et que la frappe de roger soit un succès est égale à 0,25.

4. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :

$P(S)=P(\bar{D}\cap S)+P(D\cap S)=0,25+P(D)\times P_D(S)=0,25+\frac{1}{3}\times 0,9=0,25\times 0,6=0,85$.

5. On nous demande de calculer $P_S(\bar{D})$

$P_S(\bar{D})=\frac{P(\bar{D}\cap P(S))}{P(S)}=\frac{0,25}{0,85}=\frac{5}{17}=0,29$ au centième près.

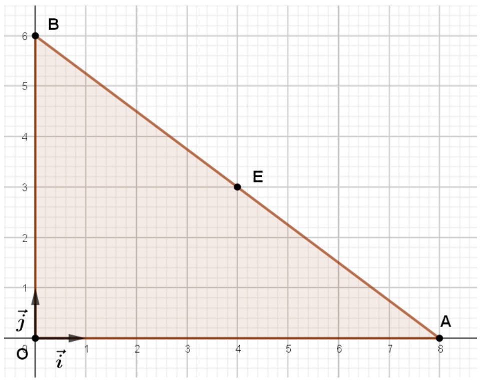
EXERCICE 3 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère le triangle OAB où O est l'origine du du repère, A est le point de coordonnées (8;0) et B celui de coordonnées (0;6).
On considère donc le point E milieu de [AB].
La figure est donnée en **annexe 2**, elle sera compléter au fur et à mesure et remise avec la copie.
On rappelle que dans un triangle, la médiane issue d'un sommet est la droite passant par par ce sommet et par le milieu du côté opposé et que le centre de gravité d'un triangle est le point de concours de ses 3 médianes.

1. Calculer les 2 produits scalaires :
1.a. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$
1.b. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE}$

2.a. Justifier que l'équation : $1{,}5x+y-6=0$ est une équation cartésienne de la médiane issue de B dans le triangle OAB. Tracer cette médiane sur la figure annexe.
2.b. Déterminer une équation de la médiane issue de O dans le triangle OAB.
2.c. Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle OAB.
Placer le point G sur la figure annexe.

ANNEXE 2



CORRECTION

1.a. $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=8\times 0+0\times 6=0$

Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux.

1.b. $E\left(\frac{8+0}{2};\frac{6+0}{0}\right)$ $E(4;3)$ $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE}=8\times 4+0\times 3=32$

2.a. Soit I le milieu de [OA] $I(4;0)$

La médiane issue de B dans le triangle OAB et la droite (BI).

B(0;6) $1{,}5\times 0+6-6=0$

I(4;0) $1{,}5\times 4+0-6=0$

donc $1{,}5\,x+y-3=0$ est une équation de la droite (BI).

2.b. La médiane du triangle OAB tssue de O est la droite (OI).

$M(x:y)$ $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$M\in(OE)$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}4 & x\\3 & y\end{vmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ $4y-3x=0$

2.c. Le centre de gravité G du triangle OAB est le point d'intersection des droites (BI) et (OE).

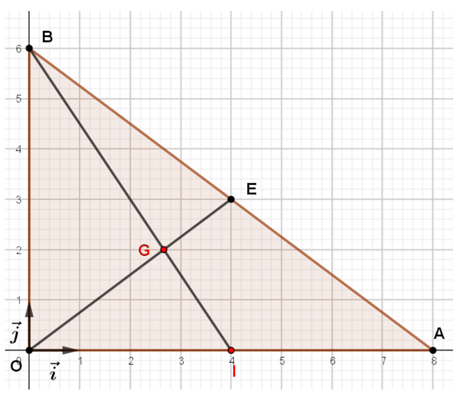
On résout le système $\begin{cases}1{,}5\,x+y-6=0\\-3x+4y=0\end{cases}$

$\begin{cases}3x+2y-12=0\\-3x+4y=0\end{cases}$ on obtient : $6y-12=0$ $\Leftrightarrow$ $y=2$

$\begin{cases}-6x-4y+24=0\\-3x+4y=0\end{cases}$ on obtient : $-9x+24=0$ $\Leftrightarrow$ $x=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}$

donc $G\left(\frac{8}{3};2\right)$.

ANNEXE 2



EXERCICE 4 (5 points)

En 2016 a été lancée un plateforme de streaming par abonnement.
Le tableau suivant donne le nombre d'abonnés (en milliers) au 31 décembre de chaque année de 2016 jusqu'en 2019.

rang de l'année	1	2	3	4
31 décembre de l'année	2016	2017	2018	2019
nombres d'abonnés (en milliers)	12	13.7	15.8	18.2

Les responsables de cette plateforme étudient l'évolution du nombre d'abonnés afin d'adopter leurs investissements.

1. Quelle a été en pourcentage l'évolution du nombre d'abonnés entre 3016 et 2017.

2. Expliquer pourquoi le taux moyen d'évolution par au entre 2016 et 2019 arrondi au centième est de 14,89 %

3. On considère que le le nombre d'abonnés a augmenté de 15 % par an à partir de 2016.
On décide de modéliser ce nombre d'abonnés (en millions) par an par une suite de premier terme 12.
Préciser la nature de cette suite et sa raison.

4. Quel sera selon ce modèle, le nombre d'abonnés au 31 décembre 2020 ?

5. Pour déterminer en quelle année, selon ce modèle, sera obtenu l'objectif de 40 millions d'abonnés, on a défini en langage Python de fonction Seuil ci-dessous :

```
1 def Seuil ( ):
2   n=2016
3   A=12
4   while ....:
5     A= ....
6     n=n+1
7   return n
```

Recopier et compléter les instructions 4 et 5 afin que ce programme fournisse l'année où cet objectif sera atteint.

CORRECTION (5 points)

1. Le pourcentage du nombre d'abonnés entre 2016 à 2017 est égal à $\frac{13,7-12}{12}\times 100=14,17\,\%$ (arrondi au centième).

2. Le coefficient multiplicateur entre 2016 au 2019 est : $a\times\frac{18,2}{12}$.

Le coefficient multiplicateur annuel moyen entre 2016 et 2019 est q tel que $q^3=a$

donc $q=\sqrt[3]{\frac{18,2}{12}}=1,1489$ à 10^{-4} près.

Si t est le taux annuel en pourcentage moyen entre 2016 et 2019 alors $q=1+\frac{t}{100}$ et $t=14,89\,\%$.

3. Si le nombre d'abonnés augmente de 15 % par an alors le coefficient multiplicateur d'une année sur l'autre est $1+\frac{15}{100}=1,15$ donc pour tout entier naturel n $u_{n+1}=1,15\times u_n$ et $u_0=12$.

Donc la suite (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=12$ et de raison : 1,15.

4. Pour tout entier naturel n $u_n=u_0\times 1,15^n=12\times 1,15^n$.

Le nombre d'abonnés au 31 décembre 2020 est $u_4=12\times 1,15^4$ =21 millions d'abonnés (au dixième près).

5.

```
def Seuil():
  n=2016
  A=12
  while A<40:
    A=1, 15×A
    n=n+1
  return n
```