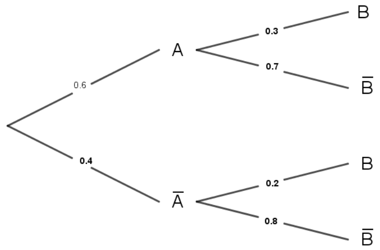
Sujet 57

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1 :
Dans un repère orthonormé, on cinsidère la parabole **P** d'équation $y=x^2+4x-11$, de sommet S et d'axe de de symétrie la droite **(d).** Quelle est la bonne proposition ?
A. S(-4;5) et **(d)** a pour équation $y=5$
B. S(-1;17) et **(d)** a pour équation $x=-1$
C. S(-1;-13) et **(d)** a pour équation $x=-1$
D. S(-1;-13) et **(d)** a pour équation $y=-1$

Question 2 :
Une expérience aléatoire met en jeu des événements A et B et leurs événements contraires $\bar{A}$ et $\bar{B}$.
L'arbre pondéré ci-dessous traduit certaines données de cette expérience aléatoire.



On a alors :

A. $P(B)=0,5$ B. $P(A\cap B)=0,9$ C. $P_A(B)=0,18$ D. $P_B(A)=\frac{9}{13}$

Question 3 :
On considère le nombre réel $\alpha=\frac{18\pi}{5}$
Un des nombres réels suivants a le même point image que le nombre réel α sur le cercle trigonométrique, lequel ?
A. $\frac{3\pi}{5}$ B. $\frac{63\pi}{5}$ C. $\frac{-12\pi}{5}$ D. $\frac{-3\pi}{5}$

Question 4 :
On considère la fonction f définie sur ℝ par : $f(x)=x\,e^x$.
La fonction dérivée de la fonction f est notée f'.
On a alors :
A. $f'(x)=e^x$ B. $f'(x)=(1+x)e^x$ C. $f'(x)=x\,e^x$ D. $f'(x)=2x\,e^x$

Question 5 :
Parmi les relations suivantes, quelle est celle qui permet de définir une suite géométrique de terme général u_n ?
A. $u_n=\frac{u_{n-1}}{2}$ B. $u_n=u_{n-1}+2$ C. $u_n=u_{n-1}^2$ D. $u_n=2u_{n-1}+10$

CORRECTION

Question 1 : **C**

Justification non demandée

. En écrivant la forme canonique du trinôme

$y=2x^2+4x-11=2(x^2+2x)-11=2(x-1)^2-2-11=2(x+1)^2-13$

donc S(-1;-13) et (d) est la droite verticale passant par S et (d) : $x=-1$.

. En considérant P comme la courbe représentative de f définie sur ℝ par $f(x)=2x^2+4x-11$

$f'(x)=4x+4$

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x+4=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$

$f(-1)=2-4-11=-13$

donc S(-1;-13) et (d) : $x=-1$

Question 2 : **D**

Justification non demandée

. $P(A\cap B)=0{,}6\times 0{,}3=0{,}18\neq 0{,}9$ B est fausse

. $P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=0{,}15+0{,}4\times 0{,}2=0{,}18+0{,}08=0{,}26\neq 0{,}5$ A est fausse

. $P_A(B)=0{,}3\neq 0{,}18$ C est fausse

On peut donc conclure que D est vraie

. $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}18}{0{,}26}=\frac{9}{13}$

Question 3 : **C**

Justification non demandée

On considère les déterminations principales

$\alpha=\frac{18\pi}{5}=\frac{20\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}=4\pi-\frac{2\pi}{5}$

. $\frac{3\pi}{5}\neq-\frac{2\pi}{5}$

. $\frac{63\pi}{5}=\frac{60\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}=12\pi+\frac{3\pi}{5}$ $\quad \frac{3\pi}{5}\neq-\frac{2\pi}{5}$

. $\frac{-12\pi}{5}=-\frac{10\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}=-2\pi-\frac{2\pi}{5}$

. $-\frac{3\pi}{5}\neq-\frac{2\pi}{5}$

Question 4 : **B**

Justification non demandée

$f(x)=x e^x \quad u(x)=x \quad u'(x)=1 \quad v(x)=e^x \quad v'(x)=e^x$

$f=uv \quad f'(x)=u'v+uv'$

$f'(x)=1\times e^x+x e^x=(1+x)e^x$

Question 5 : **A**

Justification non demantée

Pour tout entier naturel non nul

$u_n=\frac{u_{n-1}}{2}=\frac{1}{2}\times u_{n-1}$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x)=x^3+3x^2+3x-63$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative orthogonal.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Établir le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

4. Justifier que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 est la droite D d'équation $y=-64$.

5. Déterminer en quels points de la courbe $\mathscr{C}$ la tangente à la droite à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y=3x-100$.

CORRECTION (5 points)

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2+6x+3$

2. $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2\geqslant 0$

On donne le signe dans un tableau.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f '(x)		+	0	+	

3. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f '(x)		+	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	-64	$\nearrow$	$+\infty$

4. $f(-1)=-1+3-3-63=-64$

$f'(-1)=0$

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point I(-1;-64) est la droite D d'équation : $y=-64$.

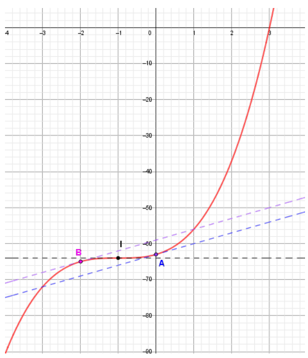
5. Une tangente à la courbe $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y=3x-100$ si et seulement si son coefficient directeur est égal à 3 c'est à dire $f'(x)=3$.

$f'(x)=3 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2+6x+3=3 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2+6x=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3x(x+2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x=0 \text{ ou } x=-2)$

. si $x=0$ alors $f(0)=-63$ la tangente au point A(0;-63) est parallèle à la droite D.

. Si $x=-2$ alors $f(-2)=-8+12-6-63=-65$ la tangente au point B(-2;-65) est parallèle à la droite D.

On donne une figure non demandée.



EXERCICE 3 (5 points)

Pour placer un capital de 5000 euros, une banque propose un placement à taux fixe de 5 % par an. Avec ce placement, le capital augmente de 5 % chaque année par rapport à l'année précédente. Pour bénéficier de ce taux avantageux, il ne faut effectuer aucun retrait d'argent durant les quinze premières années.
On modélise l'évolution du capital disponible par une suite (u_n). On note u_n le capital disponible après n années de placement.
On dépose 5000 euros le 1er janvier 2020. Ainsi $u_0=5000$.

1. Montrer que $u_2=5512{,}5$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Quelle est la nature de la suite (u_n)?
Préciser son premier terme et son raison.

4. Exprimer u_n en fonction de n.

5. Justifier que le capital doublé après 15 années de placement.

CORRECTION

1. u_1 est égal le capital disponible au 1^{er} janvier 2020 augmenté des intérêts obtenus pour l'année 2020.

$u_1 = u_0 + \frac{5}{100} \times u_0 = 5000 + \frac{25000}{100} = 5250$

u_2 est égal au capital disponible au 1^{er} janvier 2021 augmenté des intérêts obtenus pour l'année 2021.

$u_2 = u_1 + \frac{5}{100} \times u_1 = 5250 + \frac{26250}{100} = 5512{,}5$

Le capital disponible au 1^{er} janvier 2022 est de $5512{,}50$ €.

2. Pour tout entier naturel n :

u_{n+1} est le capital disponible au 1^{er} janvier 2020+(n+1).

u_n est le capital disponible au 1^{er} janvier 2020+n.

u_{n+1} est égal au capital disponible au 1^{er} janvier 2020+n augmenté des intérêts obtenus pendant l'année 2020+n.

$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{100} \times u_n = u_n + 0{,}05 \times u_n = 1{,}05 \times u_n$

3. (u_n) est la suite géométrique de premier terme 5000 et de raison q=1,05.

4. Pour tout entier naturel n :

$u_n = u_0 \times q^n = 5000 \times 1{,}05^n$

5. $u_{15} = 5000 \times 1{,}05^{15}$.

Or $1{,}05^{15} = 2{,}08$ à 10^{-2} près.

Donc $u_{15} > 5000 \times 2 = 10000$.

EXERCICE 4 (5 points)

Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points $A(-2;1)$, $B(1;2)$ et $E(0;-5)$.
On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et passant par B.

1. Justifier qu'une équation de $\mathscr{C}$ est $(x+2)^2+(y-1)^2=10$.

2. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$.

3. Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (AE) ?

4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AE).

5. Calculer les coordonnées des points d'intersection de (AE) et du cercle $\mathscr{C}$.

CORRECTION

1. $(x-x_A)^2+(y-y_B)^2=AB^2$ est une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ decentre A passant par B.
$A(-2;1)$, $B(1;2)$ donc $AB^2=(1+2)^2+(2-1)^2=9+1=10$.
$\mathscr{C}:\ (x+2)^2+(y-1)^2=10$

2. $E(0;-5)$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}=3\times 2+1\times(-6)=6-6=0$.

3. Les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires.

4. (AE) est la droite passant par A(-2;1) et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
M(x;y) $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$
$M\in(AE) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 3\times(x+2)+1\times(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x+y+5=0$
$(AE):\ 3x+y+5=0$

5. $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=10\\ 3x+y+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+4x-2y+5=10\\ 3x+y+6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2+4x-2y-5=0\\ y=-3x-5\end{cases}$
$x^2+(-3x-5)^2+4x-2(-3x-5)-5=0 \Leftrightarrow x^2+9x^2+30x+25+4x+6x+10-5=0$
$\Leftrightarrow 10x^2+40x+30=0 \Leftrightarrow x^2+4x+3=0$
$\Delta=4^2-4\times 1\times 3=16-12=4=2^2$
$x_1=\dfrac{-4+2}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \qquad x_2=\dfrac{-4-5}{2}=-3$
$y_1=-3\times(-1)+5=-2 \qquad y_2=-3\times(-3)=-5$
Les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et (AE) sont $K_1(-1;-2)$ et $K_2(-3;4)$.
La figure suivante n'est pas demandée.