Sujet 58

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1 :
Pour tout réel x, $e^{2x}+e^{4x}$ est égal :

a) e^{6x}	b) $e^{2x}(1+e^2)$	c) $e^{3x}(e^x+e^{-x})$	d) e^{8x^2}

Question 2 :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(-5;2)$ et $\vec{v}(4;10)$ et la droite (d) d'équation $5x+2y+3=0$.

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	b) $\vec{u}$ est un vecteur normal à la droite(d)	c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux	d) $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d)

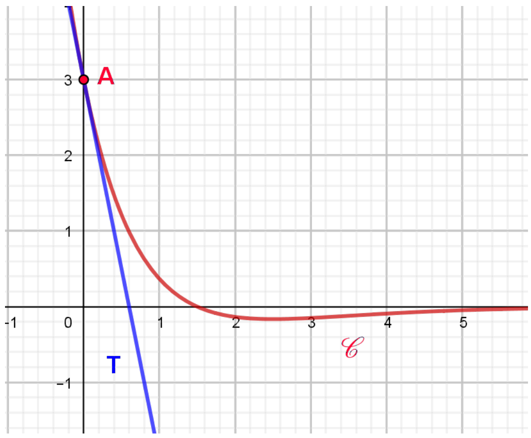
Question 3 :
La dérivée f' de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)e^{-x}$ est :

a) $2xe^{-x}$	b) $-2xe^{-x}$	c) $(-2x+3)e^{-x}$	d) $2e^{-x}+(2x-1)e^{-x}$

Question 4 :
Pour tout x, on a $\sin(\pi+x)=$

a) -sin(x)	b) cos(x)	c) sin(x)	d) -cos(x)

Question 5 :
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe est donnée ci-dessous.



La tangente à la courbe au point A est la droite T.

a) $f'(0)=3$	b) $f'(0)=\frac{1}{5}$	c) $f'(0)=5$	d) $f'(0)=-5$

CORRECTION

Question 1 : **b)**

Justification non demandée

$e^{4x}=(e^{2x})^2=e^{2x}\times e^{2x}$

$e^{2x}+e^{4x}=e^{2x}+e^{2x}\times e^{2x}=e^{2x}(1+e^{2x})$

Question 2 : **c)**

Justification non demandée

$\vec{u}.\vec{v}=(-5)\times 4+2-10=-20+20=0$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Question 3 : a)

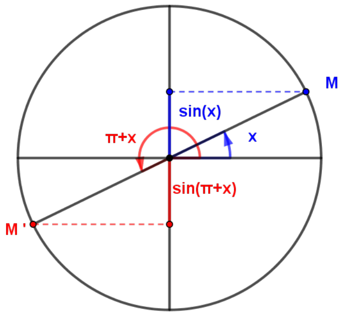
Justification non demandée

$(e^{-x})'=-e^{-x}$

$f'(x)=2e^{-x}-(2x-1)e^{-x}=(-2x+3)e^{-x}$

Question 4 : **a)**

Justification non demandée



M et M' sont diamétralement opposés.

Question 5 : **d)**

Justification non demandée

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T.

La tangente T passe par les points A(0;3) et B(1;-2).

Le coefficient directeur de T est : $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{-2-3}{1-0}=-5$

EXERCICE 2 (5 points)

La population d'une ville A augmente chaque année de 2 %. La ville A avait 4600 habitants en 2010.
La population d'une ville B augmente de 110 habitants par année. La ville b avait 5100 habitants en 2010.

Pour tout entier n, on note u_n le nombre d'habitants de la ville A et v_n le nombre d'habitants de la ville B à la fin de l'année 2010+n.

1. Calculer le nombre d'habitants de la ville A et le nombre d'habitants de la ville B à la fin l'année 2011.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) et la nature de la suite (v_n) ?

3. Donner l'expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n et calculer le nombre d'habitants de la ville A en 2020.

4. Donner l'expression de v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n et calculer le nombre d'habitants de la ville B en 2020.

5. Reproduire et compléter sur la copie l'algorithme ci-dessous qui permet de déterminer au bout de combien d'années la population de la ville A dépasse de la ville B.

```
def année ( ):
  u=4600
  v=5100
  n=0
  while . . . :
    u= . . .
    v= . . .
    n= . . .
  return n
```

CORRECTION

1. Le nombre d'habitants de la ville A à la fin de l'année 2011 est égal au nombre d'habitants en 2010 augmenté de 2 soit $\frac{2}{100}\times 4600=92$.

Le nombre d'habitants de la ville B à la fin de l'année 2011 est : 4692 .

. Le nombre d'habitants de la ville B à la fin de l'année 2011 est égal au nombre d'habitants en 2010 augmenté de 110 soit $5100+110=5210$.

2. Pour tout entier naturel n, u_n est le nombre d'habitants de la ville A à la fin de l'année 2010+n et u_{n+1} est le nombre d'habitants de la ville A à la fin de l'année 2010+(n+1).

u_{n+1} est égal à u_n augmenté de 2 % de u_n , soit $u_{n+1}=u_n+\frac{2}{100}\times u_n=1{,}02\times u_n$.

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=4100$ et de raison $q=1{,}02$.

. Pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'habitants de la ville B à la fin de l'année 2010+n et v_{n+1} est le nombre d'habitants de la ville B à la fin de l'année 2010+(n+1).

v_{n+1} est égal à v_n augmenté de 110 soit $v_{n+1}=v_n+110$.

(v_n) est la suite arithmétique de premier terme $v_0=5100$ et de raison $q=110$.

3. Pour tout entier naturel n :

$u_n=u_0\times q^n=4600\times 1{,}02^n$

$2020=2010+10$

Le nombre d'habitants de la ville A à la fin de l'année 2020 est égal à u_{10} (arrondi à l'unité).

$u_{10}=1600\times 1{,}02^{10}=5607$

4. Pour tout entier naturel n

$v_n=v_0+nr=5100+110\,n$

Le nombre d'habitants de la ville B à la fin de l'année 2020 est égal à v_{10} .

$v_{10}=5100+110\times 10=6200$

5. On complète l'algorithme proposé

```
def année ( ):
  u=4600
  v=5100
  n=0
  while u<=v:
    u=1.02*u
    v=v+110
    n=n+1
  return n
```

Remarque

Si on exécute ce programme on obtient : $n=32$.

C'est à dire en 2010+32=2042 le nombre d'habitants de la ville A sera, pour la première fois supérieur au nombre d'habitants de la ville B.

En utilisant la calculatrice :

$u_{31}=8499$ (à l'unité près)	$v_{31}=8510$	$u_{31}<v_{31}$
$u_{32}=8669$ (à l'unité près)	$v_{32}=8620$	$u_{32}>v_{32}$

EXERCICE 3 (5 points)

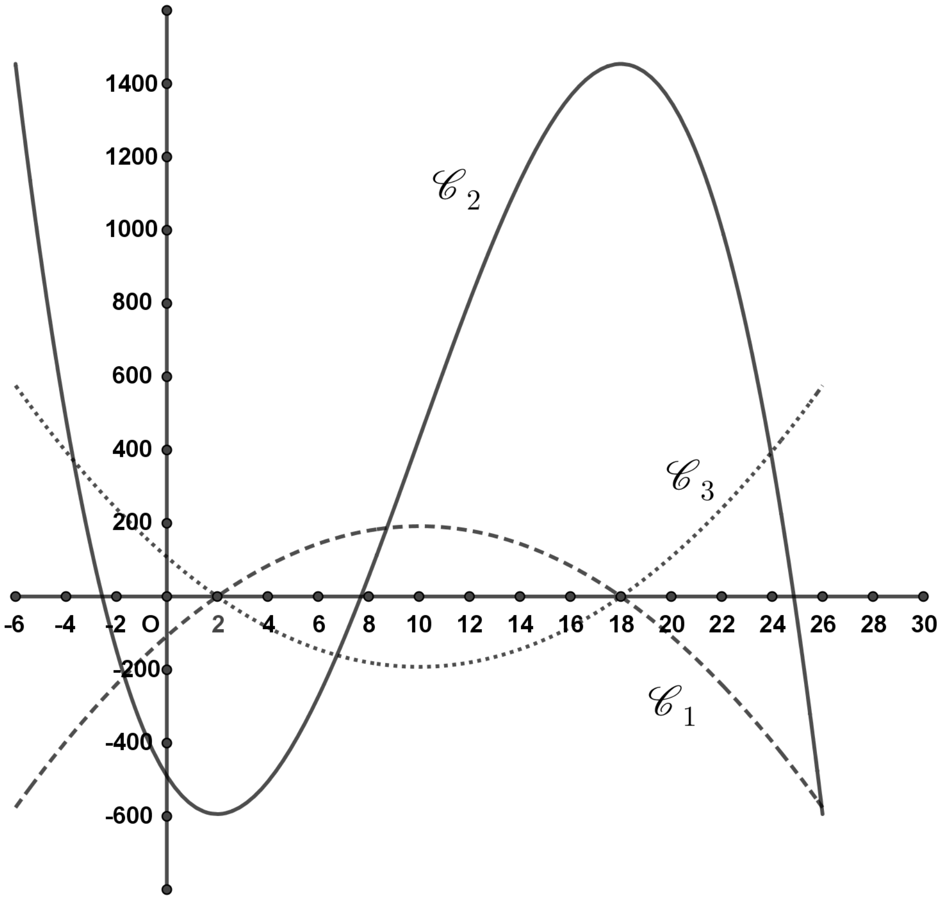
Soit h la fonction définie sur [-6;26] par : $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 180x - 490$.

1. Soit h' la fonction dérivée de h. Exprimer $h'(x)$ en fonction de x.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de h et $\mathscr{C}'$ celle de h' .

2.a. Identifier $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sur le graphique orthogonal ci-dessous pour les trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ proposées.

2.b. Justifier le choix de $\mathscr{C}'$.



3. Soit (T) la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.
Déterminer son équation réduite.

4. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction sur [-6;26]

CORRECTION

1. Pour tout nombre réel de l'intervalle [-6;26] : $h(x)=-x^3+30x^2-108x-490$

h est dérivable sur [-6;26]

$h'(x)=-3x^2+60x-108$

2.a. La courbe $\mathscr{C}$ est représentée sur le graphique par la courbe $\mathscr{C}_2$.

La courbe $\mathscr{C}'$ est représentée sur le graphique par la courbe $\mathscr{C}_1$.

2.b. h' est une fonction polynôme du second degré.

Sa courbe représentative est une parabole.

Le coefficient de x^2 est négatif donc la fonction passe par un maximum donc la courbe représentative de h' est $\mathscr{C}_1$.

3. A(0;-490) $h'(0)=-108$ donc (T) : $y=-108x+b$.

$-490=-108\times 0+b \Leftrightarrow b=-490$

(T): $y=-108x-490$

4. $h'(x)=-3x^2+60x-108$

$\Delta=60^2-4\times(-3)\times(-108)=3600-1296=2304=48^2$

$x_1=\dfrac{-60+48}{2\times(-3)}=\dfrac{-12}{-6}=2$ $\qquad x_2=\dfrac{-60-48}{2\times(-3)}=\dfrac{-108}{-6}=18$

Le coefficient de x^2 est négatif. On donne de signe sous la forme d'un tableau.

x	-6		2		18		26
h'(x)		–	0	+	0	–	

On complète pour obtenir le tableau de variation de h.

En utilisant la calculette :

$h(2)=-594 \qquad h(18)=1454 \qquad h(-6)=1454 \qquad h(26)=-594$

x	-6		2		18		26
h'(x)		–	0	+	0	–	
h(x)	1454	↘	-594	↗	1454	↘	-594

EXERCICE 4 (5 points)

Une entreprise qui fabrique des aiguilles dispose de deux sites de production le site A et le site B.
Le site A produit les trois quarts des aiguilles ; le site B l'autre quart.
Certaines aiguilles peuvent présenter un défaut.
Une étude de contrôle de qualité a révélé que :

- 2 % des aiguilles du site A sont défectueuses.
- 4 % des aiguilles du site B sont défectueuses.

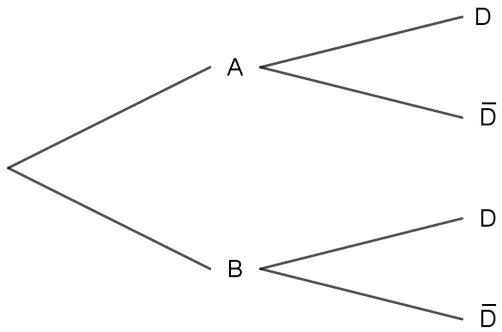
Les aiguilles des deux sites mélangées et vendues ensemble par lot.
On choisit une aiguille au hasard dans un lot et on considère les événements suivants :

- A : l'aiguille provient du site A ;
- B : l'aiguille provient du site B ;
- D : l'aiguille présente un défaut.

L'événement contraire de D est noté : $\bar{D}$.

1. D'après les données de l'énoncé, donner la valeur de la probabilité de A que l'on note $P(A)$.

2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilités ci-dessous en indiquant les probabilités sur les branches.



3. Quelle est la probabilité que l'aiguille ait un défaut et provienne du site A ?

4. Montrer que $P(D)=0{,}025$.

5. Après inspection, l'aiguille choisie se révèle défectueuse.
Qu'elle est la probabilité qu'elle ait été produite sur le site A ?

CORRECTION

1. Le site A produit les trois quarts des aiguilles donc $P(A)=\frac{3}{4}=0{,}75$.

2. $P(B)=1-P(A)=1-0{,}75=0{,}25$.

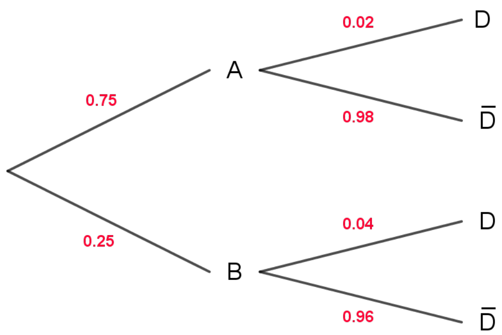
2 % des aiguilles du site A sont défectueuses donc :

$P_A(D)=0{,}02$ et $P_A(\bar{D})=1-P_A(D)=1-0{,}02=0{,}98$

4 % des aiguilles du site B sont défectueuses donc :

$P_B(D)=0{,}04$ et $P_B(\bar{D})=1-P_B(D)=1-0{,}04=0{,}96$

On complète l'arbre de probabilités.



3. On demande de calculer $P(A\cap D)$

$P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)=0{,}75\times 0{,}02=0{,}015$

4. En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule de probabilités totales :

$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)=0{,}015+P(B)\times P_B(D)=0{,}015+0{,}25\times 0{,}04=0{,}015+0{,}01=0{,}025$

5. On nous demande de calculer $P_D(A)$

$P_D(A)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}015}{0{,}025}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}=0{,}6$.