Sujet 59

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1
Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0=2$ et de raison 0,9.
On a :

a) $u_{50}=47$	b) $u_{50}=100.9$	c) $u_{50}=-47$	d) $u_{50}=-100.9$

Question 2
Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0=2$ et de raison 0,9.
La somme des 37 premiers termes de la suite (v_n) est :

a) $2*\dfrac{1-0.9^{38}}{1-0.9}$	b) $2*\dfrac{1-0.9^{37}}{1-0.9}$	c) $0.9*\dfrac{1-2^{38}}{1-2}$	d) $0.9*\dfrac{1-2^{37}}{1-2}$

Question 3
Un programme en langage Python qui retourne la somme des entiers de 1 à 100 est :

a)
```
def somme( ):
    s=0
    while s<100:
        s=s+1
    return (s)
```

b)
```
def somme ( ):
    s=0
    while s<100:
        s=2*s+1
    return (s)
```

c)
```
def somme ( ):
    s=0
    for k in range (101):
        s=s+k
    return (s)
```

d)
```
def somme
    s=0
    for k in range (100):
        s=s+k
    return (s)
```

Question 4
On a $x\in[-\frac{\pi}{2};0]$ et $\cos x=0,8$ alors :

a) sinx=0.6	b) sinx=- 0.6	c) sinx=- 0.2	d) sinx=0.2

Question 5
Le nombre réel $\dfrac{13\pi}{4}$ est associé au même point du cercle trigonométrique que le réel :

a) $\dfrac{-14\pi}{4}$	b) $\dfrac{-3\pi}{4}$	c) $\dfrac{7\pi}{4}$	d) $\dfrac{19\pi}{4}$

CORRECTION

Question 1 : a)

Preuve non demandée

Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors pour tout entier naturel n on a : $u_n=u_0+nr$ donc $u_{50}=2+50\times0{,}9=2+45=47$.

Question 2 : b)

Preuve non demandée

Si (v_n) est la suite géométrique de premier v_0 et de raison q alors la somme des 37 premiers termes de la suite est : $S=v_0+v_1+\ldots+v_{36}=v_0\times\frac{1-q^{37}}{1-q}=2\times\frac{1-0{,}9^{37}}{1-0{,}9}$

Question 3 : c)

Preuve non demandée

Pour le programme **a)** après exécution on obtient 100=99+1

On ne calcule pas la somme des entiers de 1 à 100.

Pour le programme **b)** après exécution on obtient 127 (les intermédiaires sont : 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127).

On ne calcule pas la somme des entier de 1 à 100.

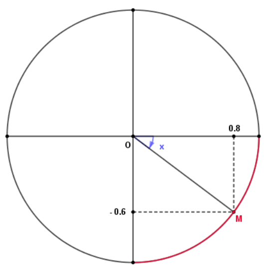
Pour le programme **c)** après exécution on obtient 5050 (k in range(101) veut dire que k prend les 101 valeurs comprises entre 0 et 100), on obtient bien la somme de ces nombres.

Pour le programme **d)** après exécution on obtient 4950 (somme des entiers compris entre 0 et 99).

Question 4 : b)

Preuve non demandée

$x\in[-\frac{\pi}{2};0]$



$\cos^2x+\sin^2=1 \Leftrightarrow 0{,}8^2+\sin^2x=1 \Leftrightarrow \sin^2x=1-0{,}64=0{,}36 \Leftrightarrow |\sin x|=\sqrt{0{,}36}=0{,}6$

$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant0$ donc $\sin x\leqslant0$ donc $\sin x=-0{,}6$.

Question 5 : b)

Preuve non demandée

$\frac{13\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+4\pi$

a) $-\frac{14\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}-4\pi=\frac{\pi}{2}-4\pi$

b) $-\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{7\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi$

d) $\frac{19\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+4\pi$

EXERCICE 2 (5points)

Le dépistage d'une maladie particulière, que l'on appelle M s'effectue par un test basé sur le dosage d'une hormone particulière.
D'après cette étude, cette maladie M touche $1{,}5$ % de la population.
Si une personne est atteinte par la maladie M, le test sera positif dans 95 % des cas, alors que si la personne n'est pas la maladie M, le test sera négatif dans 99 % des cas.
On soumet à ce test une personne prise au hasard dans la population.
On note :
. A l'événement : « La personne est atteinte par la maladie M » ;
. T l'événement : « Le test est positif.

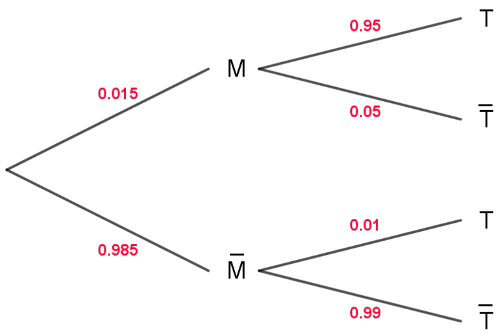
1. Déterminer la probabilité pour que le test soit positif et que la personne choisie ne soit pas malade.

2. Déterminer la probabilité pour que le test soit positif.

3. Calculer $P_T(\bar{A})$ (arrondir à 10^{-3}).
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

La maladie M touche 1,5 % de la population donc :
$P(M)=0{,}015$ et $P(\bar{M})=1-P(M)=1-0{,}015=0{,}985$.
Si une personne est atteinte, le test sera positif dans 95 % des cas donc :
$P_M(T)=0{,}95$ et $P_M(\bar{T})=1-P_M(T)=1-0{,}95=0{,}05$.
Si la personne n'est pas atteinte, le test sera négatif dans 99 % des cas donc :
$P_{\bar{M}}(\bar{T})=0{,}99$ et $P_{\bar{M}}(T)=1-P_{\bar{M}}(\bar{T})=1-0{,}99=0{,}01$.
On obtient l'arbre pondéré suivant :



1. On nous demande de calculer $P(T\cap\bar{M})$
$P(T\cap\bar{M})=P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=0{,}985\times 0{,}01=0{,}00985$.

2. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales.
$P(T)=P(T\cap M)+P(T\cap\bar{M})$
$P(T)=P(M)\times P_M(T)+P(\bar{M})\times P_{\bar{M}}(T)=0{,}015\times 0{,}95+0{,}985\times ¿\,0{,}01=0{,}01425+0{,}00985=0{,}0241$.

3. On nous demande de calculer $P_T(\bar{M})=\dfrac{P(T\cap\bar{M})}{P(T)}=\dfrac{0{,}00968}{0{,}0241}=0{,}409$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-2,5x+1)e^x$.

1. On note f' la fonction dérivée de f.

1.a. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(x^2-0,5x-1,5)e^x$.

1.b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.

2.a. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$.

2.b. On admet que la tangente $\mathscr{T}$ recoupe la courbe $\mathscr{C}_f$ au point P d'abscisse α strictement positive.
À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α au dixième près.

CORRECTION

1.a. $f(x)=(x^2-2{,}5x+1)e^x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$u(x)=x^2-2{,}5x+1$ $\qquad u'(x)=2x-2{,}5$

$v(x)=e^x$ $\qquad v'(x)=e^x$

$f=uv$ $\qquad f'=u'v+uv'$

$f'(x)=(2x-2{,}5)e^x+(x^2-2{,}5x-1)e^x=(x^2-0{,}5x-1{,}5)e^x$

1.b. Pour tout nombre réel x, on a $e^x>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme : $x^2-0{,}5x-1{,}5$.

$\Delta=(-0{,}5)^2-4\times1\times(-1{,}5)=0{,}25+6=6{,}25=2{,}5^2$

$x_1=\dfrac{0{,}5-2{,}5}{2\times1}=-1$ et $x_2=\dfrac{0{,}5+2{,}5}{2\times1}=1{,}5$

Le trinôme est positif sur les intervalles : $]-\infty;-1[$ et $]1{,}5;+\infty[$.

Le trinôme est négatif sur l'intervalle]-1;1,5[.

On donne les variations de f sous la forme d'un tableau.

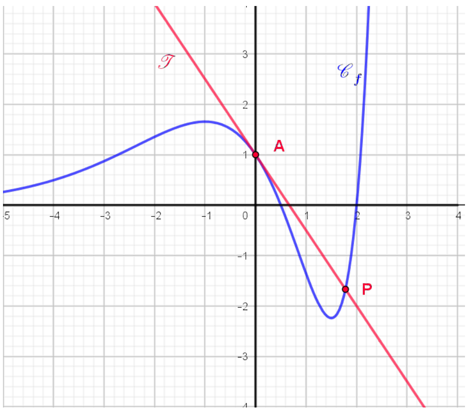
x	-∞		-1		1.5		+∞
f '(x)		+	0	–	0	+	
f(x)		↗		↘		↗	

2.a. $f(0)=1$ A(0;1) $\quad f'(0)=-1{,}5$

$\mathcal{T}$ est la droite de coefficient directeur -1,5 et passant par le point A.

$\mathcal{T}$: $y=-1{,}5x+1$

2.b. On trace la courbe représentative de f et sa tangente au point A(0;1).



L'abscisse du point P est α .

Par lecture graphique : $1{,}5<\alpha<2$.

$\mathcal{T}$ est la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x)=-1{,}5x+1$.

Sur l'intervalle $[0;\alpha[$ $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{T}$ donc $f(x)<g(x)$.

Sur l'intervalle $]\alpha;2]$ $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\mathcal{T}$ donc $f(x)>g(x)$.

On détermine détermine un encadrement au dixième près de α par balayage en utilisant la calculatrice.

On arrondit les valeurs de f(x) au millième.

$f(1{,}6)=-2{,}179$ $\qquad g(1{,}6)=-1{,}4$ $\qquad f(1{,}6)<g(1{,}6)$

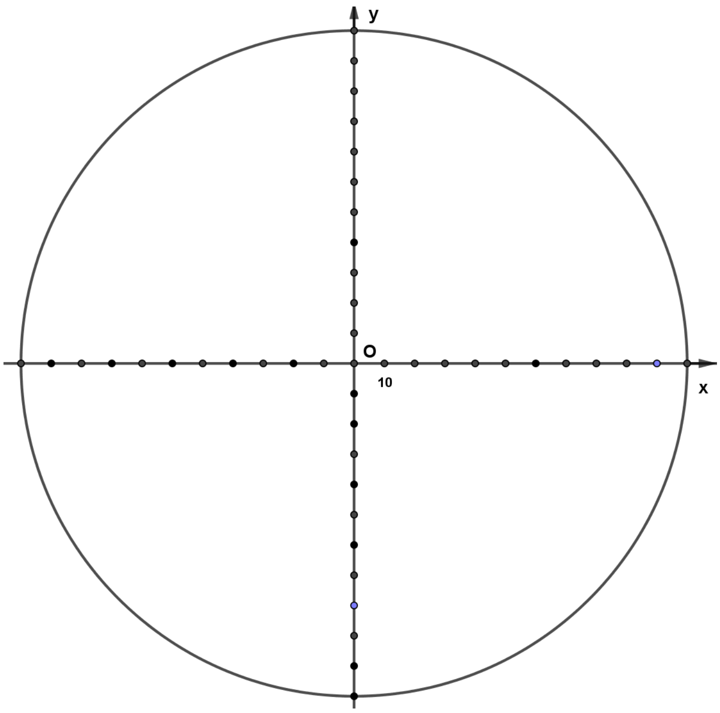
$f(1{,}7)=-1{,}971$ $\qquad g(1{,}7)=-1{,}55$ $\qquad f(1{,}7)<g(1{,}7)$

$f(1{,}8)=-1{,}573$ $\qquad g(1{,}8)=-1{,}7$ $\qquad f(1{,}8)>g(1{,}8)$

Donc $1{,}7<\alpha<1{,}8$.

EXERCICE 4 (5 points)

Le centre commercial « L'autre faubourg » de Cholet a été conçu en forme circulaire de 110 m de rayon, permettant un e visibilité de 360° est un accessibilité optimale, notamment aux personnes à mobilité réduite.
Le parking, situé à l'intérieur du disque, dessert l'ensemble des 32 magasins.
On munit le plan d'un repère orthonormé de centre O.
L'unité est le mètre.
Les entrées des magasins du centre sont situées sur le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 110.



1. Une allée centrale couverte a été construite afin de permettre aux automobilistes de rejoindre les magasins en cas d'intempéries.
Elle est modélisée par la droite (AD) avec A(-30;15) et D(80;-40).

1.a. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.

1.b. Démontrer que le point O appartient à la droite (AD).

2. Camille qui vient de garer sa voiture en G(-10;-10) sous une pluie battante, souhaite se mettre à l'abri sous cette allée centrale, le plus rapidement possible.

2.a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AO}$

2.b. Le point de la droite (AD) le plus proche de G est-il le point O ?

CORRECTION

1.a. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 110 donc :
$\mathscr{C}$ $x^2+y^2=110^2=12100$

1.b. A(-30;15) D(80;-40) M(x;y) $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}110\\-55\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+30\\y-15\end{pmatrix}$

$M\in(AD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+30 & 110\\ y-15 & -55\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -55(x+30)-110(y-15)=0$

$\Leftrightarrow -55x-1650-110y+1650=0 \Leftrightarrow -55x-110y=0 \Leftrightarrow x+2y=0$

Donc le point O(0;0) appartient à (AD).

2.a. $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}-10\\-10\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}30\\-15\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AO}=-10-20-10\times(-15)=-300+150=-150$

2.b. $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}\neq 0$ donc le point O n'est pas le point de (AD) le plus proche de G.
Le point de (AD) le plus proche de G est le point H.