Sujet 6

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Un vecteur normal à la droite d'équation cartésienne 2x-5y+3=0 a pour coordonnées :

a) $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$	b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	c) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Question 2

Le centre A du cercle d'équation $x^2+y^2+6x-8y=0$ est :

a) A(3;4)	b) A(-3;4)	c) A(-4;3)	d) A(4;-3)

Question 3

On considère un triangle ABC tel que AB=3, BC=5 et AC=6, on a alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ égal à

a) -18	b) 10	c) 26	d) 0

Question 4

Le nombre réel $\frac{-3\pi}{4}$ est associé au même point du cercle trigonométrique que le réel :

a) $\frac{-14\pi}{4}$	b) $\frac{7\pi}{4}$	c) $\frac{13\pi}{4}$	d) $\frac{19\pi}{4}$

Question 5

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(4x-7)^3$ a pour fonction dérivée

a) $g'(x) = 3(4x-7)^2$	b) $g'(x) = 12(4x-7)$
c) $g'(x) = 12x-21$	d) $g'(x) = 12(4x-7)^2$

CORRECTION

Question 1 Réponse : d

Preuve non demandée

$D: \ 2x-5y+3=0$ $\quad \vec{N}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite D.

$\vec{n}_a\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_b\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_c\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_d\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

Le seul vecteur colinéaire à $\vec{N}$ est $\vec{n}_d$. $\quad n_d=-\vec{N}$.

Question 2 Réponse : b

Preuve non demandée

$x^2+y^2+6x-8y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2-9+(y-4)^2-16=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)^2+(y-4)^2=25=5^2$

Cercle de centre A(-3;4) et de rayon 5.

Question 3 Réponse : b

Preuve non demandée

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2=BA^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+AC^2$

On obtient : $5^2=3^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+6^2 \quad \Leftrightarrow \quad 25-9-36=-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \quad -20=-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=10$

Question 4 Réponse : c

Preuve non demandée

$\frac{-14\pi}{4}=\frac{2\pi}{2}-4\pi=\frac{\pi}{2}-4\pi \qquad \frac{7\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi$

$\frac{13\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+4\pi \qquad \frac{19\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+4\pi$

Question 5 Réponse : d

Preuve non demandée

$(u^n)'=n\times u^{n-1}\times u'$

$g(x)=(4x-7)^3 \qquad u(x)=4x-7 \qquad u'(x)=4 \qquad n=3$ et $n-1=2$

$g'(x)=3(4x-7)^2\times 4=12(4x-7)^2$

EXERCICE 2 (5 points)

Un modèle de téléphone portable d'une grande entreprise est produit par deux sous-traitants A et B.

Chez le sous-traitant A, qui assure 40 % de la production totale, 4 % des téléphones sont défectueux.
Le sous-traitant B associe lereste de la production.

On constate que la probabilité qu'un téléphone pris au hasard dans les stocks de l'entreprise soit défectueux est de 0,034.

1. Quel pourcentage de la production totale le sous-traitant B assure-t-il ?

2. Quelle est la probabilité qu'un téléphone provienne du sous-traitant B sachant qu'il est défectueux ?
On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

CORRECTION

1. Le sous-traitant A assure $40\ \%$ de la production et le sous-traitant B le restede la production.
Donc le pourcentage de la production totale que le sous-traitant b est : $100-40=60\ \%$.

2. On note ;
A l'événement : « le téléphone pris au hasard dans les stocks de l'entreprise a été produit par le sous-traitant A »
B l'événement : « le téléphone pris au hasard dans les stocks de l'entreprise a été produit par le sous-traitant B »
D l'événement : « le téléphone pris au hasard dans les stocks de l'entreprise est défectueux ».

. On a $P(A)=\frac{40}{100}=0{,}4$ $\quad P(B)=\frac{60}{100}=0{,}6$ et $P(D)=0{,}034$.

$4\ \%$ des téléphone produit par le sous traitant A sont défectueux donc $P_A(D)=0{,}04$.

-3 **.** En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)$

$P(A\cap D)=P(A)\times P_A(D)=0{,}4\times 0{,}04=0{,}016$

$0{,}034=0{,}016+P(B\cap D) \quad \Leftrightarrow \quad P(B\cap D)=0{,}034-0{,}016=0{,}018$

. On nous demande de calculer $P_D(B)$

$P_D(B)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}018}{0{,}034}=\frac{18}{34}=\frac{9}{17}=0{,}529$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 3

Soit la suite (u_n) de premier terme $u_0=400$ vérifiant la relation, pour tout entier naturel n :
$u_{n+1}=0,9u_n+60$.
Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0=-200$ et de raison 0,9.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Calculer la somme des 20 premiers termes de la suite (v_n) .

3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? La suite (u_n) est-elle géométrique ?

4. Recopier et compléter la fonction Suite suivante écrite en Python qui permet de calculer la somme S des 20 premiers termes de la suite (u_n) .

```
def Suite():
  U=400
  S=0
  for i in range(20):
    S= . . . . . .. . .
    U= . . . . . . . .
  return( . . .)
```

5. On admet que $u_n=v_n+600$. En déduire u_{20} .

CORRECTION

1. $u_0=400$
$u_1=0{,}9\times u_0+60=0{,}9\times 400+60=360+60=420$
$u_2=0{,}9\times u_1+60=0{,}9\times 420+60=378+60=438$

2. (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=-200$ et de raison $q=0{,}9$.
On note : $s_{20}=v_1+v_2+\ldots+v_{19}$ (somme des 20 premiers termes de la suite (v_n) .
$q\times s_{20}=v_1+v_2+\ldots+v_{20}$ et $(1-q)\times s_{20}=v_0-v_{20}$.
$1-q=1-0{,}9=0{,}1$ $v_{20}=v_0\times q^{20}=-200\times 0{,}9^{20}$ donc $0{,}1\times s_{20}=-200-200\times 0{,}9^{20}$
$s_{20}=10\times(-200-200\times 0{,}9^{20})=-2000\times(1-0{,}9^{20})=-1756{,}85$ à 10^{-2} près.

3. Si (u_n) est une suite arithmétique alors u_1 est la moyenne arithmétique de u_0 et u_2 c'est à dire $u_1=\dfrac{u_0+u_2}{2}$.
Or $u_1=420$ et $\dfrac{u_0+u_2}{2}=\dfrac{400+438}{2}=419\neq 420$.
La suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
Si (u_n) est une suite géométrique alors $|u_1|$ est la moyenne géométrique de $|u_0|$ et $|u_2|$ c'est à dire $u_1^2=u_0\times u_2$.
$u_1^2=420^2=176400$ et $u_0\times u_2=400\times 438=175200\neq 176400$.
La suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

4.

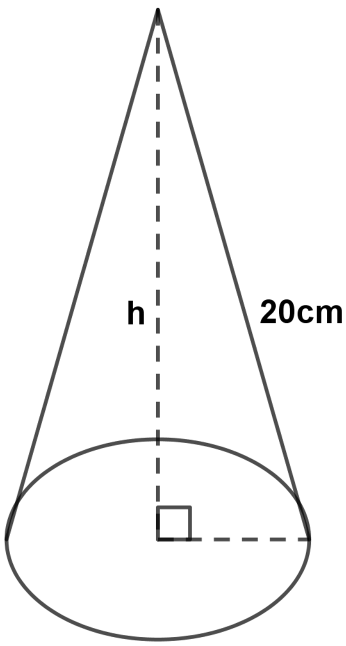
```
def Suite():
  U=400
  S=0
  for i in range(20):
    S=  S+U
    U= 0.9*U+60
  return(S )
```

Si on ajoute une dernière ligne : print(Suite()) et si on exécute le programme, on obtient :
S= 10234,15 à 10^{-2} près.

5. $u_{20}=600+v_{20}=600+200\times 0{,}9^{20}=575{,}68$ à 10^{-2} près.
<u>Remarque</u>
$S=u_0+u_1+\ldots+u_{19}=(600+v_0)+(600+v_1)+\ldots+(600=v_{19})=20\times 600+s_{20}=12000-1756{,}85=10234{,}15$
à 10^{-2} près.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère un cône de révolution ayant une génératrice de longueur 20 cm et de hauteur h en cm.
On rappelle que le volume V en cm³ d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ cm² et de hauteur h en cm est : $V=\frac{1}{3}\mathscr{A}h$.
Dans cet exercice, on cherche la valeur de h qui rend le volume du cône maximum.



1. Exprimer le rayon de la base en fonction de h.

2. Démontrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h est : $V(h)=\frac{\pi}{3}(400h-h^2)$.

3. Quelle hauteur h choisir pour que le volume du cône soit maximum.

CORRECTION

1. On considère un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 20 (cm) et un côté de l'angle droit a pour longueur h (cm) et le troisième côté a pour longueur r (cm), rayon du disque de base du cône.
En utilisant le théorème de }}gore.
$20^2=h^2+r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2=400-h^2$
Remarque :
h est la longueur en cm d'un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a pour longueur 20 cm donc $0\leqslant h\leqslant 20$.
Conclusion
$r=\sqrt{400-h^2}$

2. L'aire du disque de rayon r est : $\mathcal{A}=\pi r^2=\pi(400-h^2) \quad (cm^2)$.
$V(h)=\frac{1}{3}\mathcal{A}h=\frac{\pi}{3}(400-h^2)\times h=\frac{\pi}{3}(400h-h^3)$.

3. $V'(h)=\frac{\pi}{3}(400-3h^2)$ h appartient à l'intervalle [0;20].
Le signe de $V'(h)$ est le signe de $T(h)=400-3h^2=(20-\sqrt{3}h)(20+\sqrt{3}h)$.
$T(h)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(h=\frac{20}{\sqrt{3}} \text{ ou } h=-\frac{20}{\sqrt{3}}\right)$.
Le coefficient de h^2 est négatif donc :

h	$-\infty$	$-\frac{20}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{20}{\sqrt{3}}$		20	$+\infty$
T(h)	−	0	+		+	0	−		−

Tableau de variations de V

h	0		$\frac{20}{\sqrt{3}}$		20
V '(h)		+	0	−	
V(h)	0	↗	M	↘	0

Le volume du cône est maximal pour $h=\frac{20}{\sqrt{3}}=11,55$ cm à 10^{-2} près.

$M=3224,53$ cm^3 à 10^{-3} près.