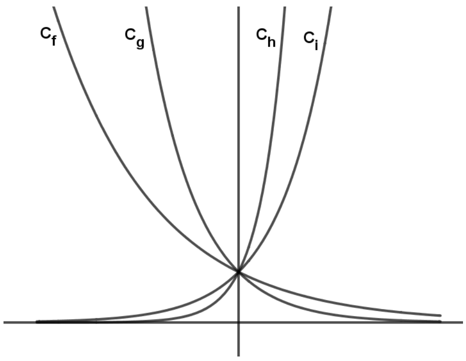
Sujet 60

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

Dans le repère orthogonal suivant, on a tracé quatre courbes, chacune associée à une fonction de variable réelle x et d'expression $e^{\lambda x}$ où λ est un paramètre réel.



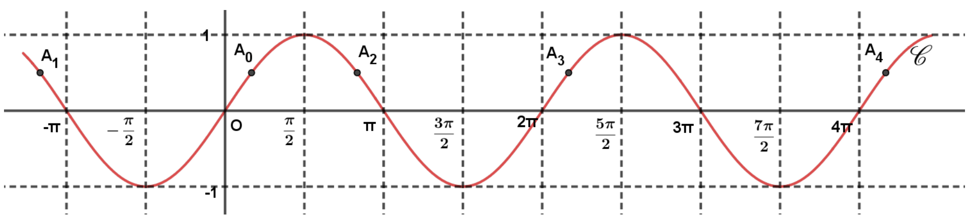
Quelle courbe possède le plus petit paramètre λ ?

a) C_f	b) C_g	c) C_h	d) C_i

Question 2
On choisit au hasard un couple ayant deux enfants et on note X la variable aléatoire égale au nombre de filles du couple. On admet que la probabilité qu'un enfant soit une fille est égale à 0,5 et qu'il y a indépendance du sexe entre deux naissances.
Déterminer $P(X \geqslant 1)$.

a) 0.25	b) 0.5	c) $\frac{1}{3}$	d) 0.75

Question 3
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction sinus dans un repère orthogonal.



A_0, A_1 ; A_2 ; A_3 et A_4 sont des points de $\mathscr{C}$ et ils ont la même ordonnée.
Parmi les segments suivants, lequel a pour longueur la période de la fonction sinus.

a) $[A_0A_1]$	b) $[A_0A_2]$	c) $[A_0A_3]$	d) $[A_0A_4]$

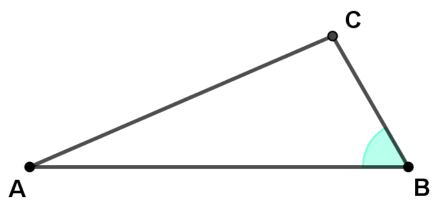
Question 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=0{,}5x^2-2x+1$.
On considère l'équation $f(x)=0$ d'inconnue x appartenant à $\mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de cette équation est :

a) $\varnothing$	b) $\{2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\}$	c) $\{2-\sqrt{6};2+\sqrt{6}\}$	d) $\{4-2\sqrt{2};4+2\sqrt{2}\}$

Question 5

ABC est un triangle tel que $AB=2$, $BC=2$ et $\widehat{ABC}=60°$.



La longueur AC est égale à :

a) $\sqrt{19}$	b) $\sqrt{21}$	c) $\sqrt{28}$	d) $\sqrt{29}$

CORRECTION

Question 1 : b)

Preuve non demandée

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tous nombres réels a et b, on a : $a<b \Leftrightarrow e^a<e^b$.
Pour $x=1$, on remarque que $g(1)<f(1)<i(1)<h(1)$.
Car sur $[0;+\infty[$ la courbe représentative de g est en dessous de celles de f, i et h.

Conséquence

λ est le plus petit pour la fonction g.

Question 2 : d)

Preuve non demandée

On note :
F_1 l'événement : « le premier enfant est une fille » ;
G_1 l'événement : « le premier enfant est un garçon » ;
F_2 l'événement : « le deuxième enfant est une fille » ;
G_2 l'événement : « le deuxième enfant est un garçon ».
On a : $P(F_1)=P(G_1)=P(F_2)=P(G_2)=0{,}5$

$X(G_1\cap G_2)=0 \qquad X(G_1\cap F_2)=1 \qquad X(F_1\cap G_2)=1 \qquad X(F_1\cap F_2)=2$

$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-P(G_1\cap G_2)$.

Il y a indépendance du sexe de l'enfant entre deux naissances donc :

$P(G_1\cap G_2)=P(G_1)\times P(G_2)=0{,}5\times 0{,}5=0{,}25$

$P(X\leqslant 1)=1-0{,}25=0{,}75$

Question 3 : c)

Preuve non demandée

La période de la fonction sinus est égale à 2π.

$A_0A_1>2\pi \qquad A_0A_2<2\pi \qquad A_0A_3=2\pi \qquad A_0A_4>2\pi$

Question 4 : b)

Preuve non demandée

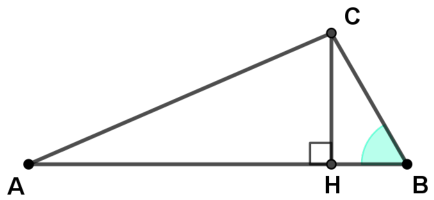
$0{,}5x^2-2x+1=0$

$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times 0{,}5=4-2=2>0$

$x_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\times 0{,}5}=2-\sqrt{2} \qquad x_2=2+\sqrt{2} \qquad \mathcal{S}=\{2-\sqrt{2}\,;2+\sqrt{2}\}$

Question 5 : a)

Preuve non demandée



Attention : le triangle ABC n'est pas un triangle rectangle.

Le triangle CHB est rectangle en H. $\cos(\widehat{CBH})=\cos(60^\circ)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{HB}{CB}=\dfrac{HB}{2}$ donc HB=1 et HA=AB-HB=5-1=4

$\sin(\widehat{CBH})=\sin(60^\circ)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{CH}{BC}=\dfrac{CH}{2} \qquad CH=\sqrt{3}$.

Le triangle ACH est rectangle en H $AC^2=AH^2+CH^2=4^2+\sqrt{3}^2=19 \qquad AC=\sqrt{19}$

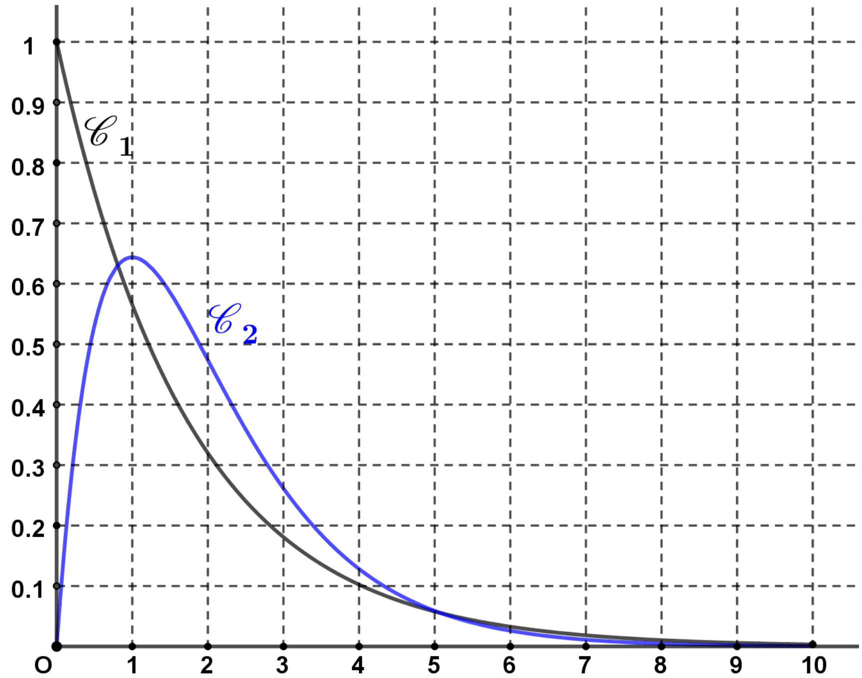
EXERCICE 2 (5points)

On modélise la diffusion dans le sang d'un médicament de 1 gramme par intraveineuse (fonction f_1, courbe représentative $\mathscr{C}_1$) ou par voie orale (fonction f_2, courbe représentative $\mathscr{C}_2$) pendant durée de 10 heures.
Plus précisément :

. $f_1(t)$ modélise la proposition du médicament dans le sang à l'instant t, où t est le temps en heure après injection par intraveineuse ;

. $f_2(t)$ modélise la proportion du médicament dans le sang à l'instant t, où t est le temps en heure après administration par voie orale.

Pour tout réel t de l'intervalle [0:10], on admet que $f_1(t)=e^{-0,57t}$ et $f_2(t)=1,75te^{-t}$.
Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de f_1 et f_2 sont représentées ci-dessous.



1. *Injection par voie intraveineuse.*

1.a. Déterminer le sens de variation de f_1.

1.b. Résoudre graphiquement $f_1(t)<0,1$.

2. *Administration pat voie orale.*

On note $f_2'(t)$ la fonction dérivée de la fonction f_2.

2.a. Montrer que, pour tout t de [0;10] :

$f'(t)=1,75(1-t)e^{-t}$

2.b. Construire le tableau de variation de la fonction f_2.

2.b. À quel instant t la proportion de médicament dans le sang est-elle la plus élevée ?

CORRECTION

1.a. f_1 est dérivable sur [0;10], $f_1'(t) = -0{,}57e^{-0{,}57t} < 0$.
f_1 est strictement décroissante sur [0;10].

1.b. Par lecture graphique.
$f_1(t) < 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad t > 4$
Au bout de 4 heures la proportion du médicament dans le sang est inférieure à 0,1.

2.a. f_2 est dérivable sur [0;10].
$f_2'(t) = 1{,}75e^{-t} - 1{,}75\,t\,e^{-t} = 1{,}75(1-t)e^{-t}$

2.b. Le signe de $f_2'(t)$ est le signe de (1- t).
$f_2(0) = 0 \qquad f_2(10) = 1{,}75\,e^{-10} \qquad f_2(1) = 1{,}75\,e^{-1} = 0{,}64$ à 10^{-2} près.
Tableau de variation de f_2

t	0		1		10
$f_2'(t)$		+	0	−	
$f_2(t)$	0	↗	$f_2(1)$	↘	$f_2(10)$

2.c. La proportion du médicament dans le sang est maximale au bout d'une heure, elle est égale à 0,64.

EXERCICE 3 (5 points)

Dans un pays, le nombre de créations d'entreprise augmente de 1,5 % par mois.
En janvier 2018, on compte 50 000 créations d'entreprise.
On modélise le nombre de créations d'entreprise au $n^{\text{ième}}$ mois par une suite (u_n) telle que $u_{n+1}=u_n\times1{,}015$ et $u_0=50$, u_n est exprimée en milliers d'entreprises.

1.a. Calculer u_1 .
1.b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2.a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2.b. Exprimer u_n en fonction de n.
2.c. Un journaliste annonce qu'au total de l'année 2018, près de 652 000 entreprises se sont crées.
Donner un calcul permettant de justifier les propos du journaliste.

CORRECTION

1.a. $u_1 = 50 \times 1{,}015 = 50{,}75$.

1.b. En février 2018, le nombre de créations d'entreprise est de 50 750.

2.a. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 50$ et de raison $q = 1{,}015$.

2.b. $u_n = u_0 \times q^n = 50 \times 1{,}015^n$

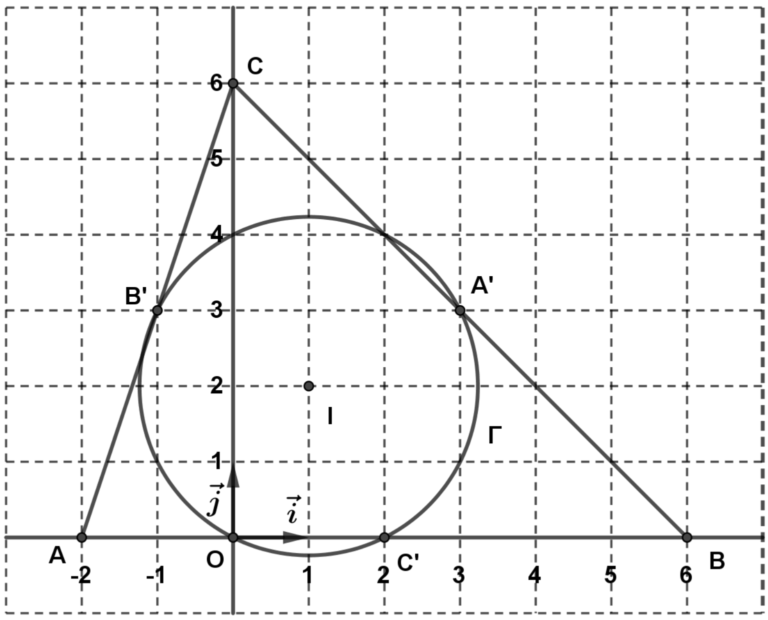
2.c. Le nombre total de créations d'entreprise (en milliers d'entreprises) en 2018 est la somme :
$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{11}$. Somme des 12 premiers termes de la suite géométrique (u_n) .

$$S = u_0 \times \frac{1-q^{12}}{1-q} = 50 \times \frac{1-1{,}015^{12}}{-0{,}015} = 50 \times \frac{1{,}015^{12}-1}{0{,}015} = 652{,}061 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Le nombre total de créations d'entreprise en 2018 est 652,061 milliers d'entreprises soit 652 061 entreprises.

EXERCICE 4 (5 points)

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan.
On considère les points A, B et C de coordonnées respectives (-2;0), (6;0) et (0;6).
Les points A', B' et C' milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].
Le cercle Γ passant par les points A', B' et C' a pour centre le point I de coordonnées (1;2).



1.a. Calculer le rayon de ce cercle.
1.b. En déduire qu'une équation du cercle Γ est : $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

2. Propriété des hauteurs du triangle ABC.
2.a. On admet que O est le pied de la hauteur issue de C. Montrer que le point O est le cercle Γ .
2.b. Soit H_A le pied de la hauteur issue de A. Montrer que H_A a pour coordonnées (2;4).
2.c. Justifier que le point H_A est sur le cercle Γ .

CORRECTION

1.a. I(1;2) A'(3;3) $\overrightarrow{IA'}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

$IA'^2=4+1=5 \qquad IA'=\sqrt{5}=R$

Le rayon du cercle Γ est $R=\sqrt{5}$.

1.b. Une équation du cercle Γ de centre I et de rayon R est : $(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=R^2$

donc Γ : $(x-1)^2+(y-2)^2=5$.

2.a. $(0-1)^2+(0-2)^2=1+4=5$

donc O(0;0) appartient au cercle Γ.

2.b. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} \qquad M(x;y) \qquad \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-6\\y\end{pmatrix}$

$M\in(BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}-6 & x-6\\ 6 & y\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -6y-6(x-6)=0$

$\Leftrightarrow -6y-6x+36=0 \Leftrightarrow x+y-6=0$.

h_A est la hauteur du triangle ABC issue de A.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} \qquad M(x;y) \qquad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y\end{pmatrix}$

$M\in h_A \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow -6(x+2)+6y=0 \Leftrightarrow -6x+6y-12=0 \Leftrightarrow x-y+2=0$

H_A est le point d'intersection de (BC) et h_A.

$\begin{cases}x+y-6=0\\x-y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=4\\2y=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

$H_A(2;4)$.

2.c. $(2-1)^2+(4-2)^2=1^2+2^2=5$ donc $H_A\in\Gamma$

Remarque

$H_B\in\Gamma$