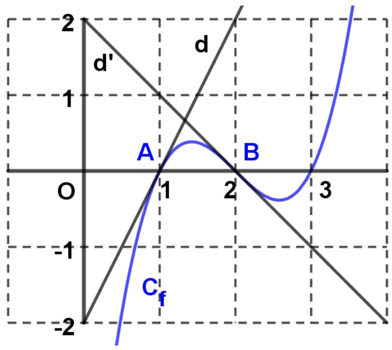
Sujet 61

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1



La courbe ci-dessus C_f est la représentation graphique dans un repère orthonormé, d'une fonction f.
Les droites d et d' sont respectivement les tangentes à la courbe C_f aux points d'abscisses 1 et 2.
Les équations réduites de d et de d' sont respectivement, $d: y=2x-2$ et $d': y=-x+2$.
Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

Proposition A : $f'(1)=0$ **Proposition B :** $f'(2)=2$
Proposition C : $f'(2)=-1$ **Proposition D :** $f'(1)=-2$

Question 2

Soit $x\in[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ tel que $\sin x=\frac{1}{2}$.

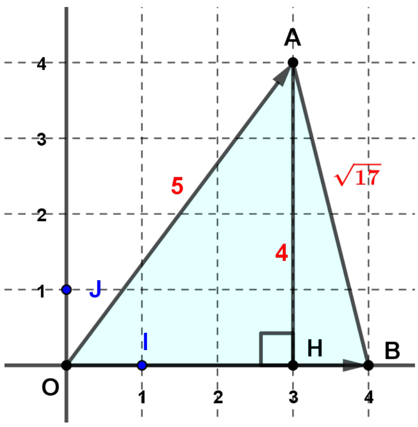
Parmi les propositions suivantes, la quelle est juste ?

Proposition A : $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Proposition B :** $x=\frac{\pi}{6}$

Proposition C : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Proposition D :** $x=-\frac{7\pi}{6}$

Question 3

Soit (O;I;J) un repère orthonormé du plan.
Soit A et B deux points de coordonnées respectives (3;4) et (4;0).



Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

Proposition A : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=20$ **Proposition B :** $\sin(\widehat{AOB})=\frac{\sqrt{17}}{5}$

Proposition C : $\cos(\widehat{AOB})=\frac{4}{5}$ **Proposition D :** $\sin(\widehat{AOB})=\frac{4}{5}$

Question 4
(O;I;J) est un repère orthonormé un plan.
Soit d une droite dont une équation cartésienne est : 3x+2y-10=0.
Une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à d passant par le A de coordonnées (1;2) est :
Proposition A : $3x+2y-7=0$ **Proposition B :** $2x+3y-8=0$
Proposition C : $2x-3y+4=0$ **Proposition D :** $3x-2y+1=0$

Question 5
Soit (O;I;J) un repère orthonormé du plan.
Soit A et B deux points de coordonnées respectives (1;2) et (5;-2).
Une équation cartésienne du cercle C de diamètre [AB] est :
Proposition A : $x^2+y^2-8x-2y+7=0$ **Proposition B :** $(x-1)^2+(y-2)^2=32$
Proposition C : $x^2 2+y^2-4x+2y-5=0$ **Proposition D :** $x^2+y^2-6x+1=0$

CORRECTION

Question 1 : **Proposition C**

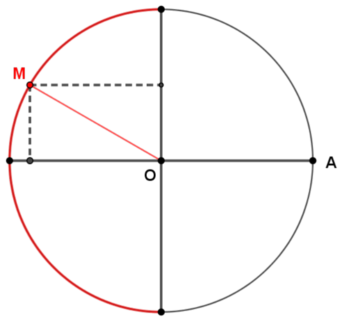
Preuve non demandée

La droite $d: y=2x-2$ est tangente à C_f en $A(1;0)$ donc $f'(1)=2$

La droite d' : $y=-x+2$ est tangente à C_f en $B(2:0)$ donc $f'(2)=-1$

Question 2 : **Proposition A**

Preuve non demandée



$\cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad |\cos x|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

x appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ donc $\cos x<0$ et $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Attention $-\frac{7\pi}{6}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM})$ qui n'appartient pas à l'intervalle donné.

Question 3 : **Proposition D**

Preuve non demandée

Le triangle AOH est rectangle en H.

$\widehat{AOB}=\widehat{AOH}$

$\cos(\widehat{AOB})=\cos(\widehat{AOH})=\frac{OH}{OA}=\frac{3}{5} \qquad \sin(\widehat{AOB})=\sin(\widehat{AOH})=\frac{AH}{OA}=\frac{4}{5}$

Question 4 : **Proposition D**

Preuve non demandée

$\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d donc un vecteur normal à d'.

A(1;2) M(x;y) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$

$M\in d' \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}.\overrightarrow{AM}=0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\times(x-1)+2\times(y-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x+2y-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-2y+1=0$

Question 5 : **Proposition D**

Preuve non demandée

M(x;y) A(1;2) B(5;-2) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-5\\y+2\end{pmatrix}$

$M\in C \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-5)+(-2)(y+2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-6x+5+y^3-4=0$

$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2-6x+1=0$

EXERCICE 2 (5 points)

Une balle de caoutchouc est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de 2 mètres au dessus du sol.
Le choc n'étant pas parfaitement élastique, la balle rebondit jusqu'à une hauteur de 1,60 mètre et continue de rebondir, en atteignant après chaque rebond une hauteur égale au $\frac{4}{5}$ du rebond précédent.
On modélise les hauteurs atteintes par la balle par une suite (h_n) où pour tout entier naturel n, h_n est la hauteur, exprimée en mètre, atteinte par la balle au $n^{\text{ième}}$ rebond.
On a alors $h_0=2$.

1.a. Donner h_1 et h_2.
1.b. Pour tout entier naturel n, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.
1.c. En déduire la nature de la suite (h_n).
On précisera sa raison et son premier terme.
1.d. Déterminer le sens de variation de la suite (h_n).

2. Déterminer le nombre maximal N de rebonds à partir duquel la hauteur atteinte par la balle est inférieure à 20cm.
Expliquer la démarche employée.

CORRECTION

1.a. $h_1=2\times\frac{4}{5}=\frac{8}{5}=1{,}6$

$h_2=1{,}6\times\frac{4}{5}=1{,}28$

1.b. La balle atteint après chaque rebond $\frac{4}{5}$ de la hauteur du rebond précédent donc pour tout entier naturel n : $h_{n+1}=\frac{4}{5}h_n$.

1.c. (h_n) est la suite géométrique de premier terme $h_0=2$ et de raison $q=\frac{4}{5}=0{,}8$.

1.d. Pour tout entier naturel n, $h_n=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^n>0$ et $h_{n+1}=\frac{4}{5}h_n$ donc :

$h_{n+1}-h_n=\frac{4}{5}h_n-h_n=\left(\frac{4}{5}-1\right)h_n=-\frac{1}{5}h_n<0$.

La suite (h_n) est décroissante .

2. $h_n<0{,}2 \quad\Leftrightarrow\quad 2\times\left(\frac{4}{5}\right)^n<0{,}2 \quad\Leftrightarrow\quad 2\times0{,}8^n<0{,}2$

- Avec la calculatrice
  On calcule successivement les termes de la suite.(on arrondit au centième près **que** pour le tableau).

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h_n	2	1.6	1.28	1.02	0.82	0.66	0.52	0.42	0.34	0.26	0.21	0.17

On obtient N=11

- On utilise un tableau

	A	B
1	n	h
2	0	2
3	1	1,6
4	2	1,28
5	3	1,024
6	4	0,8192
7	5	0,65536
8	6	0,524288
9	7	0,4194304
10	8	0,33554432
11	9	0,268435456
12	10	0,214748365
13	11	0,171798692

On obtient N=11

- On utilise un programme Python

```
def nombre_rebonds():
    n=0
    h=2
    while h>=0.2:
        n=n+1
        h=h*0.8
    return n
print(nombre_rebonds())
```

Lorsque l'on exécute ce programme, on obtient N=11.

EXERCICE 3 (5 points)

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert : un assortiment de macarons et une part de tarte tatin.
Des études statistiques montrent que :

- L'assortiment de macarons est choisi par 50 % des clients ;
- la part de tarte tatin est choisie par 30 % des clients ;
- 20 % des clients ne prennent pas de dessert ;
- aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

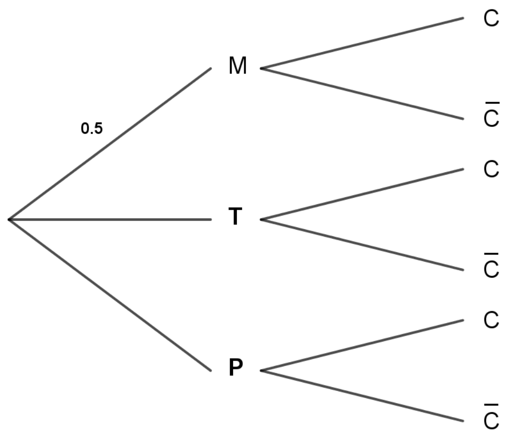
- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant.
On note les événements suivants :

- M : « le client prend un assortiment de macarons » ;
- T : « le client prend une part de tarte tatin » ;
- P : « le client ne prend pas de dessert » ;
- C : « le client prend un café » et $\overline{C}$ l'événement contraire de C.

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser $P(T)$ probabilité de T et celle de $P_T(C)$ la probabilité de l'événement C sachant que l'événement T est réalisé.

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



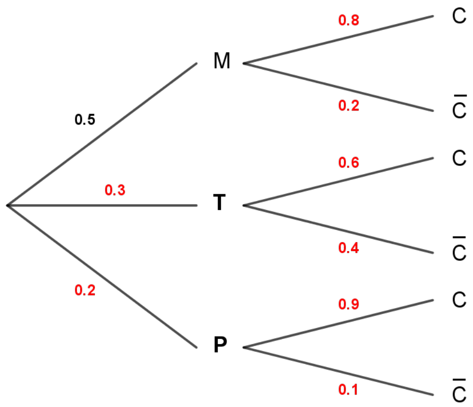
3.a. Exprimer par une phrase ce que représente l'événement $(M \cap C)$ puis calculer $P(M \cap C)$.
3.b. Montrer que $P(C)=0,76$.

4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ?
(On donnera le résultat arrondi au centième).

CORRECTION

1. La part de tarte tatin est choisie par 30%des clients donc $P(\mathrm{T}) = 0{,}3$.
Parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin 60 % prennent un café donc $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{C})=0{,}6$.

2. 20 % des clients ne prennent aucun dessert donc $P\,(\mathrm{T})=0{,}2$.
Parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café donc
$P_{\mathrm{M}}(\mathrm{C})=0{,}8$ et $P_{\mathrm{M}}(\overline{\mathrm{C}})=1-0{,}8=0{,}2$.
$P_{\mathrm{T}}(\mathrm{C})=0{,}6$ et $P_{\mathrm{T}}(\overline{\mathrm{C}})=1-0{,}6=0{,}4$.
Parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café donc
$P_{\mathrm{P}}(\mathrm{C})=0{,}9$ et $P_{\mathrm{P}}(\overline{\mathrm{C}})=1-0{,}9=0{,}1$.
On obtient l'arbre pondéré



3.a. $\mathrm{M}\cap\mathrm{C}$ est l'événement : « le client prend un assortiment de macarons **et** un café ».
$P\ \mathrm{M}\cap\mathrm{C} = P\,(\mathrm{M})\times P_{\mathrm{M}}(\mathrm{C})=0{,}5\times0{,}8=0{,}4$.

3.b. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales :
$P\,(\mathrm{C})= P\,(\mathrm{M}\cap\mathrm{C})+ P\,(\mathrm{T}\cap\mathrm{C})+ P\,(\mathrm{P}\cap\mathrm{C})=0{,}4+ P\,(\mathrm{T})\times P_{\mathrm{T}}(\mathrm{C})=0{,}4+0{,}3\times0{,}6+0{,}2\times0{,}9$
$P\,(\mathrm{C})=0{,}4+0{,}18+0{,}18=0{,}76$.

4. On nous demande de calculer $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{M})$

$$P_{\mathrm{C}}(\mathrm{M})= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{M}\cap\mathrm{C})}{\mathrm{P}(\mathrm{C})}=\frac{0{,}4}{0{,}76}= 0{,}53$$ (arrondi au centième).

EXERCICE 4 (5 points)

Une entreprise vend des smartphones d'un seul modèle « haut de gamme ».
Le service marketing modélise le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par trimestre en fonction du prix de vente x par la fonction N définie par $N(x)=100e^{-2x}$ où :

. x est le prix de vente **en milliers d'euros** d'un smartphone modèle « haut de gamme ». le prix du smartphone modèle « haut de gamme » est compris entre 400 € et 2 000 € ; on a donc $x\in[0,4;2]$.

. N(x) est le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus trimestriellement **en millions d'unités.**

1. Si le service commercial fixe le prix de vente de ce smartphone modèle « haut de gamme » à 1 000 €, quel sera le nombre de smartphones vendus trimestriellement ?
On arrondira le résultat à mille unités.

La recette trimestrielle R(x) est obtenue en multipliant le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par le prix de vente. On obtient $R(x)=x\times N(x)$ **en milliards d'euros.**
Le coût de production en milliard d'euros en fonction du nombre de smartphones modèle « haut de gamme » fabriqués, est modélisé par la fonction C définie par : $C(x)=0,4\times N(x)$ où x est le prix de vente **en milliers d'euros** d'un smartphone.
Le bénéfice est obtenu en calculant la différence entre la recette et le coût de production.

2. Vérifier que le bénéfice trimestriel peut-être estimé à 8,120 milliards d'euros pour un prix de vente de 1 000 €.

3. Montrer que le bénéfice trimestriel s'exprime en milliards d'euros en fonction du prix de vente x en milliers d'euros par : $B(x)=(100x-40)e^{-2x}$.

4. On admet que pour tout réel $x\in[0,4;2]$
$B'(x)=(180-200x)e^{-2x}$.
Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle [0,4;2].

5. À quel prix faut-il vendre ces smartphones pour assurer un bénéfice maximal ?

CORRECTION

1. $N(1)=100e^{-2}=13{,}534$ millions d'unités.
13 534 000 smartphones

2. $R(1)=1\times N(1)=13{,}534$ milliards d'euros.
$C(1)=0{,}4\times N(1)=5{,}414$ milliards d'euros.
Le bénéfice trimestriel estimé pour un prix de vente de 1 000 € est :
$R(1)-C(1)=8{,}120$ milliards d'euros.

3. $B(x)=(x-4)\times N(x)=(x-0{,}4)100\times e^{-2x}=(100x-40)e^{-2x}$

4. On admet que $B'(x)=(180-200x)e^{-2x}$
$e^{-2x}>0$ donc le signe de $B'(x)$ est le signe de $(180-200x)$
$180-200x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{180}{200}=0{,}9$
$180-200x>0 \quad \Leftrightarrow \quad 180>200x \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}9>x$
$180-200x<0 \quad \Leftrightarrow \quad 180<200x \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}9<x$
B est croissante sur [0,4;0,9] et B est décroissante sur [0,9;2].
On donne le résultat sous la forme d'un tableau.

x	0.4		0.9		2
B'(x)		+	0	–	
B(x)		↗		↘	

5. B admet un maximum pour $x=0{,}9$.
Il faut un smartphone à 900 € pour assurer un bénéfice maximal.