Sujet 62

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

1. Soit c un nombre réel strictement supérieur à 1. Sur l'ensemble des nombres réels, la fonction polynôme f définit par : $f(x)=x^2+2x+c$.
a. change de signe exactement 2 fois
b. change de signe exactement une fois
c. est toujours positive
d. est toujours négative

2. Si x est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[-\pi;0]$ tel que $\cos x=\frac{3}{5}$, alors $\sin x$ a pour valeur :

a. $\frac{4}{5}$ **b.** $-\frac{4}{5}$ **c.** $-\frac{2}{5}$ **d.** on ne peut pas savoir

3. Le quadrilatère ABCD est un carré, on a :
a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ **b.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ **c.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=0$ **d.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=0$

4. La droite d'équation $2x-y+1=0$ coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées :
a. $A(0;1)$ **b.** $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ **c.** $A(0;-1)$ **d.** $A\left(-\frac{1}{2}\right);0$

5. Pour tout réel x, $\frac{e^x}{e^{-x}}$ est égal à :
a. -1 **b.** e^{-2x} **c.** $(e^x)^2$ **d.** e^0

CORRECTION

1. **Question 1 :** c

   Preuve non demandée

   $f(x)=x^2+2x+1+c-1=(x+1)^2+c-1$

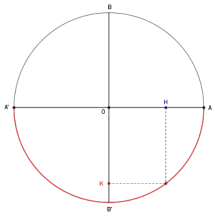
   $(x+1)^2\geqslant 0$ et $c-1>0$ donc $f(x)>0$

   ou

   $\Delta=4-4c=4(1-c)<0$ donc f(x) est du signe du coefficient de x^2.

2. **Question 2 :** b

   Preuve non demandée

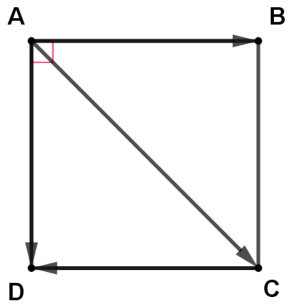


   $\cos^2 x+\sin^2 x=1 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2+\sin^2 x=1 \quad\Leftrightarrow\quad \sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad |\sin x|=\frac{4}{5}$.

   Or x appartient à l'intervalle $[-\pi;0]$ donc $\sin x<0$ et $\sin x=-\frac{4}{5}$.

3. **Question 3 :** a

   Preuve non demandée



   $\vec{u}.\vec{v}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

   $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ son t orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$.

   Remarques :

   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB^2 \qquad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2 \qquad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=AB^2$

4. **Question 4 :** d

   Preuve non demandée

   L'axe des abscisses est la droite d'équation $y=0$.

   L'abscisse du point d'intersection A de la droite d'équation $2x-y+1=0$ et de l'axe des abscisses vérifie :

   $2x+1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{2}$ donc $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

5. **Question 5 :** c

   Preuve non demandée

   $\frac{e^x}{e^{-x}}=\frac{e^x\times e^x}{e^{-x}\times e^x}=\frac{(e^x)^2}{1}=(e^x)^2$

EXERCICE 2 (5 points)

Un biologiste étudie une population de bactéries dans un milieu fermé. À l'instant initial il y a 10 000 bactéries et la population augmente de 15 % par heures. On modélise la situation par une suite (u_n) pour laquelle pour tout entier naturel n, u_n représente une estimation du nombre de bactéries au bout de n heures.
On a donc $u_0=10\,000$.

1. Expliquer pourquoi la suite (u_n) vérifie pour tout entier naturel n :
$u_n=10000\times1{,}15^n$.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) .
On précisera le premier terme et la raison.

3. Combien y aura-t-il de bactéries au de 10 heures ?

4. On considère la fonction suivante définie en Python :

```
def bactéries(N):
  u=10000
  for  i  in range(N):
    u=u*1.15
  return u
```

On a appelé cete fonction en donnant différentes valeurs au paramètre N et on a dressé le tableau suivant :

N	10	100	1000	5000
bactéries(N)	40455	$1.2*10^{10}$	$4.99*10^{64}$	$3.08*10^{307}$

Quelle interprétation peut-on donner de ces résultats dans le contexte de l'exercice ?

5. Lorsque la population atteint 200 000 bactéries, le biologiste répand du désinfectant afin de tester son efficacité. Une heure plus tard , il reste 4 000 bactéries.
Quel est le pourcentage de réduction du nombre de bactéries ?

CORRECTION

1. La population de bactéries augmente de 15 % par heure donc :

$u_1=u_0+\frac{15}{100}\times u_0=(1+0{,}15)u_0=1{,}15\times u_0$

$u_2=u_1+\frac{15}{100}\times u_1=(1+0{,}15)\times u_1=1{,}15\times u_1=1{,}15^2\times u_0$

$u_3=u_2+\frac{15}{100}\times u_2=(1+0{,}15)\times u_2=1{,}15\times u_2=1{,}15^3\times u_0$

Pour tout entier naturel n,

$u_n=1{,}15^n\times u_0=10000\times 1{,}15^n$.

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=1{,}15\times u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique, sa raison est : $q=1{,}15$ et son premier terme est : $u_0=10000$.

3. $u_{10}=10000\times 1{,}15^{10}=40455$ **.**

4. Au bout de 100 h (4 jours + 4 heures), le nombre de bactéries est estimé à : $1{,}2\times 10^{10}$ (12 milliards).
Au bout de 1000 h (41 jours + 16 heures), le nombre de bactéries est estimé à : $4{,}99\times 10^{64}$.
Au bout de 5000 h (208 jours + 8 heures), le nombre de bactéries est estimé à : $3{,}08\times 10^{307}$

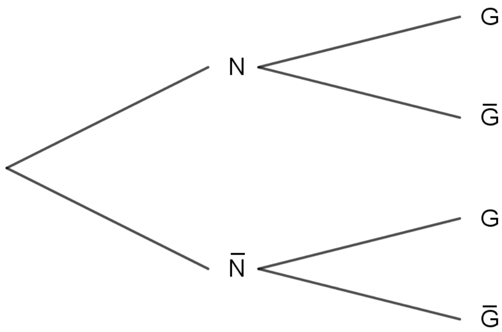
5. Le pourcentage de réduction du nombre de bactéries est :

$\frac{200000-4000}{200000}\times 100=\frac{16}{20}\times 100=0{,}8\times 100=80\,\%$.

EXERCICE 3 (5 points)

Claire joue régulièrement à un jeu de simulation de tournois de judo en ligne. Les adversaires qu'elle combat sont générés automatiquement de manière aléatoire selon le niveau atteint dans le jeu.
Elle a atteint le niveau le plus élevé, celui de ceinture noire. Les scores relevés par le jeu montrent gagne dans 45 % des cas si son adversaire est ceinture noire et dans 70 % si son adversaire n'est pas ceinture noire.
Claire commence un tournoi et son adversaire est généré par le jeu. À ce niveau la probabilité d'affronter un adversaire ceinture noire est $0,6$.
On note :
N l'événement : « l'adversaire est ceinture noire » ;
G l'événement : « Claire gagne le combat ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. Calculer la probabilité que Claire soit ceinture noire et que Claire gagne son tournoi.

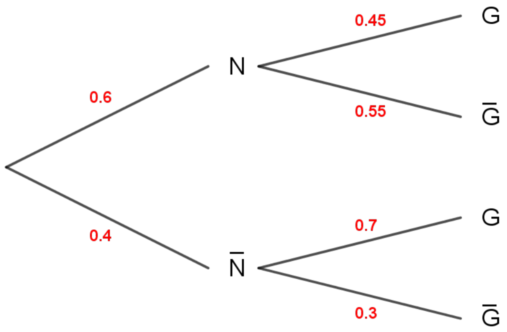
3. Montrer que la probabilité que Claire gagne son combat est 0,55.

4. Claire vient de perdre un combat. Quelle est la probabilité que le combat ait été contre une ceinture noire ?

5. On considère dans cette question que la probabilité que Claire gagne est 0,55.
Elle fait deux combats successifs.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de victoires.
Donner la loi de probabilité de X.

CORRECTION

1. La probabilité de Claire d'affronter un adversaire ceinture noire est : 0,6 donc
$P(N)=0{,}6$ et $P(\bar{N})=1-0{,}6=0{,}4$.
Claire gagne dans 45 % des cas si son adversaire est ceinture noire donc
$P_N(G)=0{,}45$ et $P_N(\bar{G})=1-0{,}45=0{,}55$.
Claire gagne dans 70 % des cas si son adversaire n'est pas ceinture noire donc
$P_{\bar{N}}(G)=0{,}7$ et $P_{\bar{N}}(\bar{G})=1-0{,}7=0{,}3$.
On obtient l'arbre pondéré :



2. On nous demande de calculer $P(N\cap G)$
$P(N\cap G)=P(N)\times P_N(G)=0{,}6\times 0{,}45=0{,}27$.

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(G)=P(N\cap G)+P(\bar{N}\cap G)$
$P(G)=P(N)\times P_N(G)+P(\bar{N})\times P_{\bar{N}}(G)$
$P(G)=0{,}27+0{,}4\times 0{,}7=0{,}27+0{,}28=0{,}55$.

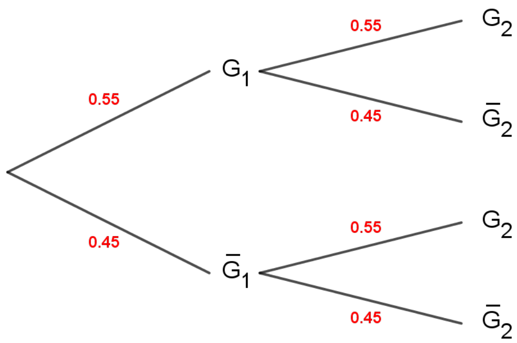
4. On nous demande de calculer $P_{\bar{G}}(N)$

$$P_{\bar{G}}(N)=\frac{P(N\cap\bar{G})}{P(\bar{G})}$$

$P(\bar{G})=1-P(G)=1-0{,}55=0{,}45$
$P(N\cap\bar{G})=0{,}6\times 0{,}55=0{,}33$

$$P_{\bar{G}}(N)=\frac{0{,}33}{0{,}45}=\frac{11}{15}=0{,}733 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

5. On note :
G_1 l'événement : « Claire le premier combat » ;
G_2 l'événement : « Claire gagne le deuxième combat ».
$P(G_1)=P(G_2)=0{,}55$ $P(\bar{G}_1)=P(\bar{G}_2)=1-0{,}55=0{,}45$



L'univers image de X est : $\mathscr{X}=\{ 0 ; 1 ; 2 \}$

$\{X=0\}$ est l'événement : « Claire perd les deux combats ».

$P(X=0)=P(\bar{G}_1\cap\bar{G}_2)=P(\bar{G}_1)\times P(\bar{G}_2)=0{,}45\times 0{,}45=0{,}2025$.

$\{X=1\}$ est l'événement : « Claire gagne le premier combat et perd le second combat **ou** Claire perd le premier combat et gagne le second ».

$P(X=1)=P(G_1\cap\bar{G}_2)+P(\bar{G}_1\cap G_2)=0{,}55\times 0{,}45+0{,}45\times 0{,}55=2\times 0{,}45\times 0{,}55=0{,}9\times 0{,}55=0{,}485$.

$\{X=2\}$ est l'événement : « Claire gagne ses deux combats ».

$P(X=2)=P(G_1)\times P(G_2)=0{,}55\times 0{,}55=0{,}3025$.

On peut vérifier que :

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}2025+0{,}495+0{,}3025=1$

On donne la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0.2025	0.495	0.3025

EXERCICE 4 (5 points)

On modélise la valeur de vente (en milliers d'euros) d'une voiture électrique en fonction du nombre x d'années à partir de sa mise sur le marché par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :
$f(x)=35\,e^{-0,22x}$

1. Calculer $f(0)$. Quel est le prix de vente de cette voiture au moment de sa mise sur le marché ?

2. Donner une valeur approchée du prix de vente au bout de 5ans et 6 mois.

3. On admet que la fonction f est dérivable et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout x appartenant à $[0;10]$: $f'(x)=-7,7\,e^{-0,22x}$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. Un client souhaite revendre sa voiture dès que celle-ci aura un prix de vente inférieur à 10 000 euros.
Après combien de mois, après avoir acheté sa voiture, pourra-t-il la revendre ?

CORRECTION

1. $f(0)=25e^{0}=35$.

Le prix de vente de cette voiture au moment de la mise sur le marché est : $35\,000\,€$.

2. f(5,5) est le point de vente de cette voiture au bout de 5 ans et 6 mois.

$f(505)=35\times e^{-0,22\times 5,5}=10437\,€$ (à l'euro près).

3. $(e^{x})'=e^{x}$ si a est un nombre réel alors $(e^{ax})'=a\,e^{ax}$ et $(e^{-0,22x})'=-0,22\,e^{-0,22x}$

donc $f'(x)=35\times(-0,22)e^{-0,22x}=-7,7\,e^{-0,22x}$.

4. $e^{-0,22x}>0$ donc $f'(x)<0$ donc f est décroissante sur l'intervalle [0;10]

$f(0)=35$ et $f(10)=3,9$ (à la centaine d'euros près).

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0		10
f '(x)		–	
f(x)	35	$\searrow$	3.9

5. En utilisant la calculatrice.

Pour 5 ans et 6 mois soit pour 66 mois, on a un prix de vente de 10 487> 10 000.

Pour 67 mois on calcule $35\,e^{-0,22\times\left(\frac{67}{12}\right)}$ on obtient : 10 267 € (à l'euro près).

Pour 68 mois on calcule $35\,e^{-0,22\times\left(\frac{68}{12}\right)}$ on obtient : 10061 € (à l'euro près).

Pour 69 mois on calcule $35\,e^{-0,22\times\left(\frac{69}{12}\right)}$ on obtient : 9 878 e (à l'euro prés).

<u>Conclusion</u>

Il faut 69 mois (5 ans et 9 mois) au client, après avoir acheté sa voiture, pour la revendre à un prix inférieur à 10 000€.

. On peut aussi proposer un programme Python.

```
from math import*
def nombre_mois():
    n=0
    u=35
    while u>10:
        n=n+1
        u=35*exp(-0.22*n/12)
    return n
print(nombre_mois())
```

Lorsque l'on exécute le programme on obtient 69 mois.