Sujet 63

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1
Une fonction du second degré f a pour forme canonique valable pour tout réel x :
$f(x)=3(x+2)^2+5$.
Concernant son discriminant :

a) on peut dire qu'il est nul	b) on peut dire qu'il est strictement positif	c) on peut dire qu'il est strictement négatif	d) on ne peut rien dire sur son signe

Question 2
Un vecteur directeur de la droite d'équation $2x+3y+5=0$ est :

$a)\vec{u}(2;3)$	$b)\vec{u}(-3;2)$	$c)\vec{u}(3;2)$	$d)\vec{u}(-2;3)$

Question 3
Dans un repère orthonormé du plan ; on considère les points A(3:-1), B(4;2) et C(1;1).
Le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ est égal à :

a) - 4	b) 2	c) 4	d) 8

Question 4
Soit g la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par : $g(x)=(2x+1)e^x$.
Pour tout réel x, $g'(x)$ est égal à :

$a)xe^x$	$b)2xe^x$	$c)(2x+2)e^x$	$d)(2x+3)e^x$

Question 5
Pour tout réel x, $\sin(x+\pi)$ est égal à :

a) cosx	b) sinx	c) - cosx	d) - sinx

CORRECTION

Question 1 : c)

Preuve non demandée

Pour tout nombre réel x : $f(x)=3(x+2)^2+5$.

Or $3(x+2)^2\geqslant 0$ et $f(x)\geqslant 5>0$ et le polynôme n'admet pas de racines réelles donc $\Delta<0$.

Question 2 : b)

Preuve non demandée

Un repère du plan étant donné, le cours précise que si la droite (D) a pour équation : $ax+by+c=0$ ($a^2+b^2\neq 0$) alors le vecteur $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de (D).

Si le repère est orthonormé alors le vecteur $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal à (D).

Question 3 : c)

Preuve non demantée

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+3\times 2=4$

Question 4 : d)

Preuve non demandée

$(e^x)'=e^x$ $(2x+1)'=2$

$((2x+1)e^x)'=2e^x+(2x+1)e^x=(2x+3)e^x$

Question 5 : d)

Preuve non demandée

Ce résultat est donné en cours.

EXERCICE 2 (5 points)

Durant l'été, une piscine extérieure perd chaque semaine 4 % de son volume d'eau pa évaporation. On étudie un bassin qui contient $80\,m^3$ après son remplissage.

1. Montrer par un calcul que ce bassin contient $76{,}8\,m^3$ une semaine après son remplissage.

2. On ne rajoute pas d'eau dans le bassin et l'eau continue de s'évaporer. On modélise le volume d'eau contenue dans la piscine par une suite (V_n), pour tout entier naturel n, on note V_n la quantité d'eau en m^3 contenue dans la piscine n semaines après son remplissage. Ainsi $V_0=80$.

2.a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1}=0{,}96\,V_n$ et préciser la nature de la suite (V_n) ainsi définie.

2.b. Donner une expression de V_n en fonction de n.

2.c. Quelle quantité d'eau contient le bassin au bout de 7 semaines ?

3. Pour compenser en partie les pertes d'eau provoquées par l'évaporation, on décide de rajouter $2\,m^3$ d'eau chaque semaine dans le bassin.
On souhaite déterminer au bout de combien de semaines le volume d'eau contenue dans la piscine devient inférieur à $70\,m^3$.
Compléter la fonction Python suivante afin que l'application nombreJour(70) renvoie le nombre de semaines à partir duquel le volume d'eau de la piscine sera inférieur à $70\,m^3$.

```
def nombrejour(U):
  N=0
  V=80
  while . . . >= . . .:
    N=N+1
    V=. . .
  return . . .
```

CORRECTION

1. La piscine perd chaque semaine 4 % de son volume d'eau par évaporation.

Au remplissage la piscine contient $80\,m^3$, donc la première semaine, la piscine perd $\frac{4}{100}\times 80=3{,}2\,m^3$ d'eau par évaporation.

Donc le bassin contient $80-3{,}2=76{,}8\,m^3$ une semaine après le remplissage.

2.a. Pour tout entier naturel n.

La $(n+1)^{\text{ième}}$ semaine, le bassin contient un volume d'eau de V_n diminué de $\frac{4}{100}\times V_n$.

Donc $V_{n+1}=V_n-0{,}04\,V_n=0{,}96\,V_n$

La suite (V_n) est la suite géométrique de premier terme $V_0=80$ et de raison $q=0{,}96$.

2.b. Pour tout entier naturel n.

$V_n=V_0\times q^n=80\times 0{,}96^n$

2.c. Au bout de 7 semaines, il reste $V_7=80\times 0{,}96^7=60{,}116\,m^3$ d'eau.

3. On complète le programme Python :

```
def nombrejour(U):
  N=0
  V=80
  while V  >=U  :
    N=N+1
    V=0.96xV+2
  return N
```

Remarques :

. Pour exécuter le programme , il faut préciser que U=70 et ajouter l'instruction : print(nombreJour(U)).
On obtient N=10.
Pendant 10 semaines le volume d'eau du bassin reste supérieur à $70\,m^3$.

. On donne le résultat (non demandé) en utilisant un tableur.

	A	B
1	0	80
2	1	78.8
3	2	77.65
4	3	76.54
5	4	75.48
6	5	74.46
7	6	73.48
8	7	72.54
9	8	71.64
10	9	70.78
11	10	69.94

En A2 on écrit =A1+1
En B2 on écrit =0,96*B1+2
Puis on étire.

EXERCICE 3 (5 points)

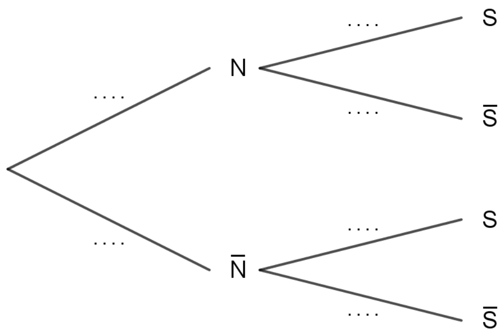
Une petite entreprise de textile commercialise des nappes et des lots de serviettes assorties.
Un client achète au plus une nappe et au plus un lot de serviettes.

En consultant le fichier des ventes de l'entreprise, on constate que :
- 20 % des clients achètent une nappe ;
- Parmi les clients ayant acheté une nappe, 70 % ont acheté un lot de serviettes.
- Parmi les clients n'ayant pas acheté de nappe, 10 % ont tout de même un lot de serviettes.

On choisit au hasard un client de cette entreprise.
Pour tout événement A, on note $\bar{A}$ l'événement contraire de A et $P(A)$ la probabilité de l'événement A.

On note les événements suivants :
- N : « le client achète une nappe » ;
- S : « le client achète un lot de serviettes ».

1. Reproduire sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-dessous décrivant la situation.



2. Calculer la probabilité pour que le client achète une nappe et un lots de serviettes.

3. Montrer que la probabilité de l'événement S est égal à 0,22.

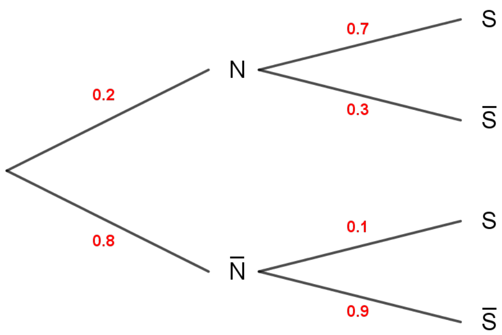
4. Calculer la probabilité que le client achète une nappe sachant qu'il a acheté un lot de serviettes.

5. Une nappe est vendue 45€ et un lot de serviettes 25€.
On appelle D la variable aléatoire donnant la dépense effectuée par un client.
Calculer l'espérance mathématique de D et donner une interprétation de ce nombre dans le contexte de l'exercice.

CORRECTION

1. 20 % des clients achètent une nappe donc $P(N)=0,2$ et $P(\bar{N})=1-0,2=0,8$.

- Parmi les clients ayant acheté une nappe, 70 % ont acheté un lot de serviettes donc :
  $P_N(S)=0,7$ et $P_N(\bar{S})=1-007=0,3$.
- Parmi les clients n'ayant pas acheté une nappe, 10 % ont achèté un lot de serviettes donc :
  $P_{\bar{N}}(S)=0,1$ et $P_{\bar{N}}(\bar{S})=1-0,1=0,9$.
- On obtient l'arbre pondéré suivant :



2. On nous demande de calculer $P(N\cap S)$.
$P(N\cap S)=P(N)\times P_N(S)=0,2\times 0,7=0,14$

3. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on a :
$P(S)=P(N\cap S)+P(\bar{N}\cap S)=P(N)\times P_N(S)+P_{\bar{N}}(S)=0,2\times 0,7+0,8\times 0,1=0,14+0,08=0,22$

4. On nous demande de calculer $P_S(N)$.
$P_S(N)=\dfrac{P(N\cap S)}{P(S)}=\dfrac{0,14}{0,22}=\dfrac{7}{11}=0,64$ à 10^{-2} près .

5. Pour $(N\cap S)$ $D=45+25=70€$ $P(N\cap S)=0,14$
Pour $(N\cap \bar{S})$ $D=45€$ $P(N\cap \bar{S})=0,2\times 0,3=0,06$
Pour $(\bar{N}\cap S)$ $D=25€$ $P(\bar{N}\cap S)=0,8\times 0,1=0,08$
Pour $(\bar{N}\cap \bar{S})$ $D=0€$ $P(\bar{N}\cap \bar{S})=0,8\times 0,9=0,72$
on donne la loi de probabilité de D sous forme de tableau.

d_i	0	25	45	70
$P(d_i)$	0.72	0.08	0.06	0.14

$E(D)=0\times 0,72+25\times 0,08+45\times 0,06+70\times 0,14=2+2,7+9,8=14,5$.
La dépense moyenne d'un client est : 14,5€.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction P définie sur l'intervalle [0;5] par : $P(t)=100\,t\,e^{-t}$.

1. Calculer P(0) et P(5) (on arrondira à l'unité).

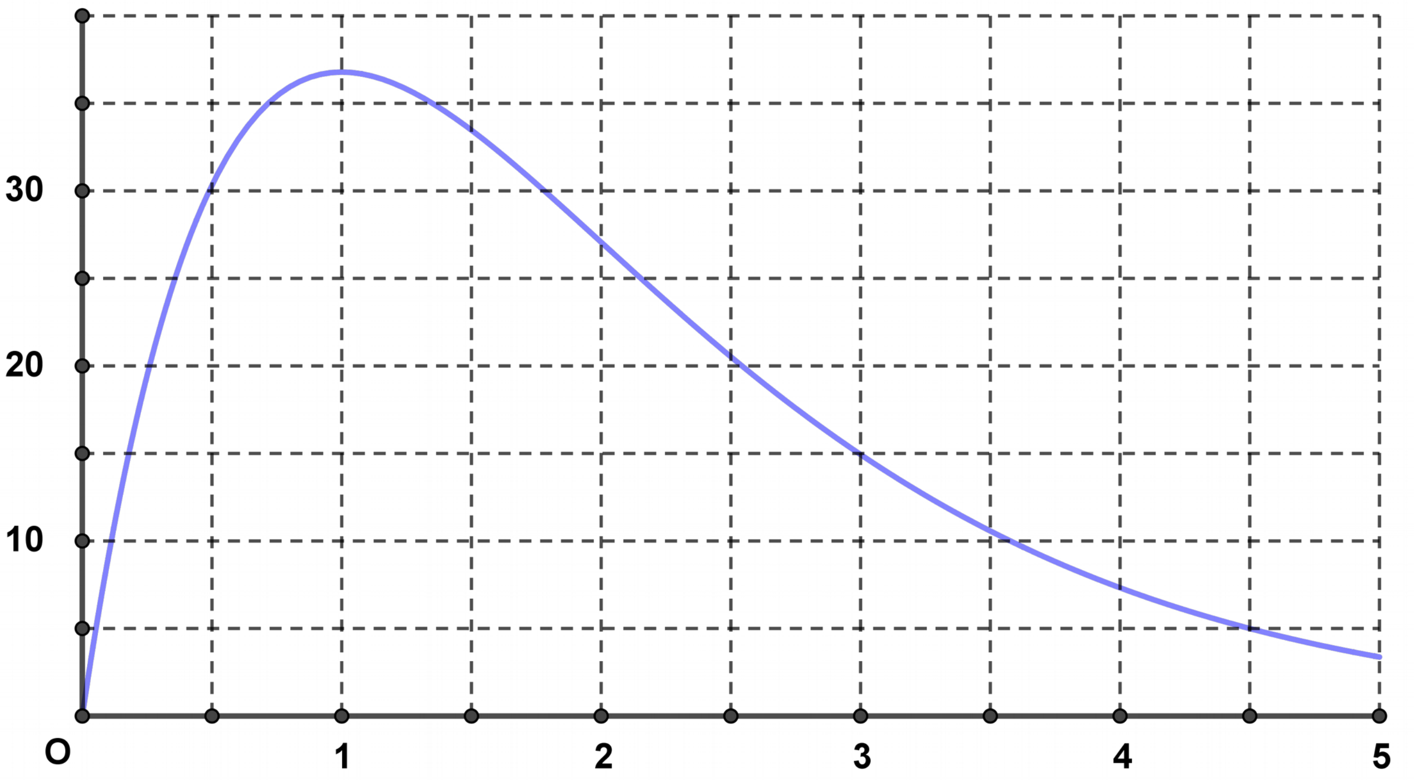
2. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu une expression de la dérivée de la fonction P pour tout réel t de l'intervalle [0:5], $P'(t)=100(1-t)e^{-t}$.

2.a. Utiliser cette expression pour étudier le signe de $P'(t)$ sur l'intervalle [0;5].

2.b. En déduire le tableau de variations de la foction P sur l'intervalle [0;5].

2.c. Pour quelle valeur de t la fonction P admet-elle un maximum ?
Quelle est la valeur de ce maximum ? (On arrondira à l'unité).

3. Une station pompe l'eau d'une rivière pour la transformer ensuite en eau potable.
Lors d'un épisode de pollution, il faut interrompre le pompage, en attendant que la vague de pollution soit évacuée par le courant.
On étudie ici un épisode de pollution ayant duré 5 heures environ.
La concentration en polluant, exprimée en milligrammes par litre (mg/L) est modélisée par la fonction P définie précédemment, où t est le temps écoulé depuis le début de l'alerte, exprimée en heures.
On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction P dans le plan muni d'un repère orthogonal.



Les normes en vigueur indiquant que ce polluant devient dangereux pour la santé si sa concentration dépasse 5 mg/L.
Lors d'un épisode déclaré de pollution dans la rivière et après arrêt du pompage, à partir de combien d'heures, peut-on considérer que la pollution ne représente plus de danger pour la santé ?

CORRECTION

1. $P(0)=0$ et $P(5)=500\,e^{-5}=1$ (arrondi à l'unité)

2. $P'(t)=100(1-t)e^{-t}$

2.a. Pour tour nombre réel de l'intervalle [0;5] : $e^{-t}>0$ donc $100\,e^{-t}>0$ et le signe de $P'(t)$ est le signe de (1-t).

$1-t=0 \Leftrightarrow t=1$ $\quad 1-t>0 \Leftrightarrow 1>t$ $\quad 1-t<0 \Leftrightarrow 1<t$

$P'(t)$ est positive sur l'intervalle [0;1[

$P'(t)$ est négative sur l'intervalle]1;5].

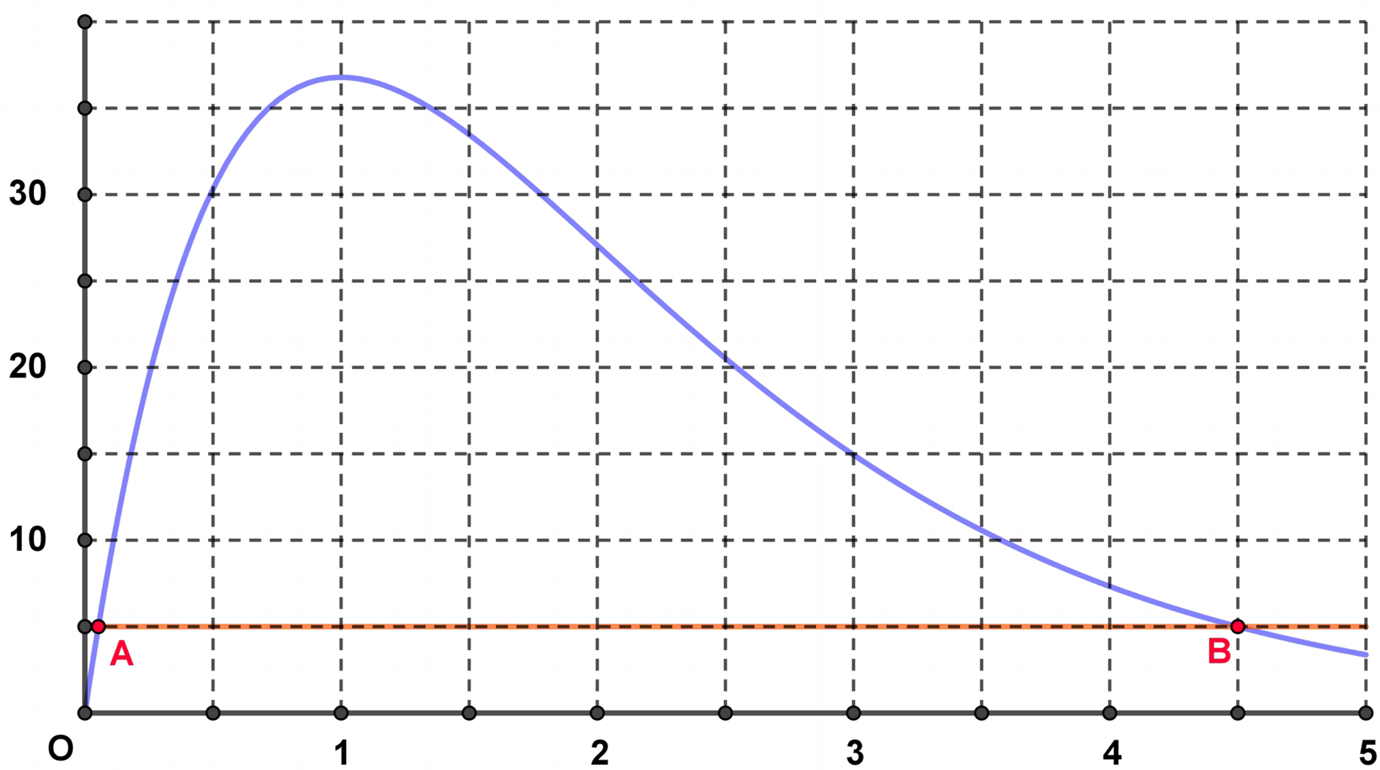
2.b. Tableau de variations de P

t	0		1		5
$P'(t)$		+	0	−	
$P(t)$	0	↗	P(1)	↘	1

2.c. P(t) est maximale pour t=1.

P(1)=37 (arrondi à l'unité).

3. On trace la droite d'équation : $y=5$.



Il y a deux points d'intersection A et B entre la courbe représentative de P et la droite d'équation y=5.
L'abscisse de A est voisine de 0 celle de B est 4,5.
La concentration est supérieure à 5 mg/L pour t compris entre les abscisses de A et B.
La pollution ne représentera plus de danger pour la santé lorsque $t>4{,}5$.
C'est à dire au bout de 4 h et 30 min .