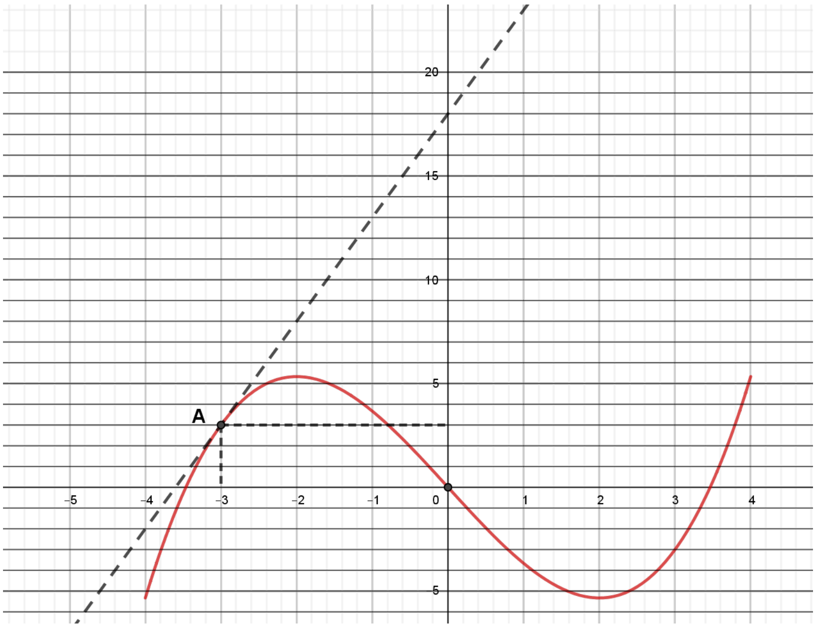
Sujet 64

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

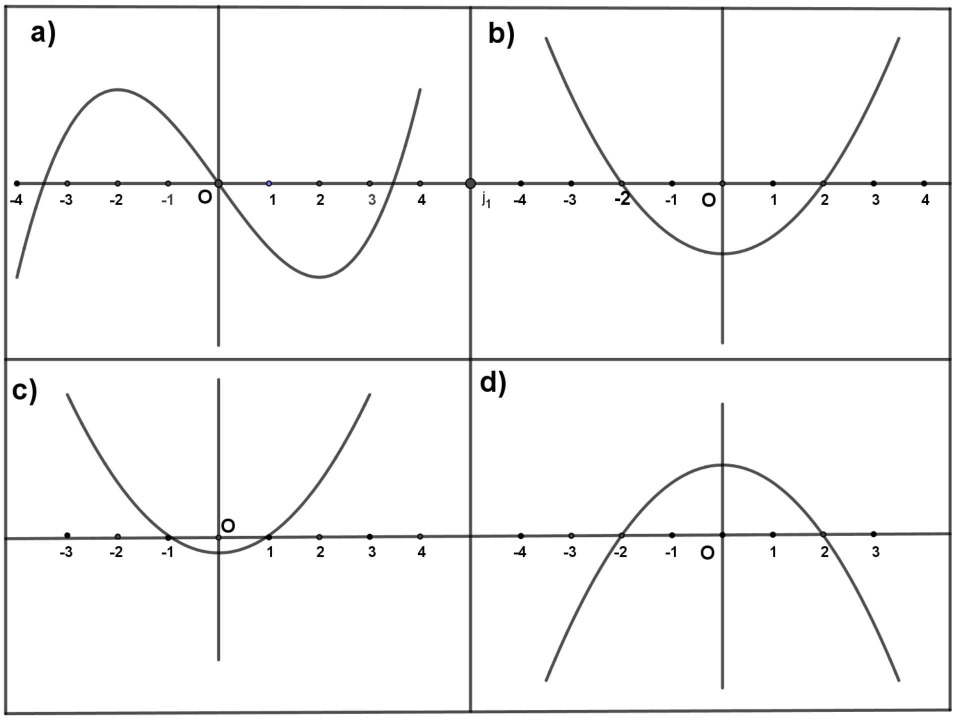
Question 1
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f. Cette courbe a une tangente T au point A(-3;3).



L'équation réduite de cette tangente est :

a) $y=\frac{1}{5}x-3{,}7$ **b)** $y=\frac{1}{5}x-18$ **c)** $y=5x+18$ **d)** $y=5x-3{,}7$

Question2
On reprend la fonction f de la question précédente.
La représentation graphique le la fonction dérivée est :



Question 3

L'expression $\cos(x+\pi)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ est égale à :

a) -2cosx **b)** 0 **c)** cosx+sinx **d)** 2cosx

Question 4

On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x)=-2x^2+4x+6$.
Cette fonction est strictement positive sur l'intervalle ou la réunion d'intervalles :

a) $]-\infty;-1[\cup]3;+\infty[$ **b)** $]-1;3[$ **c)** $]-\infty:-3[\cup]1;-\infty[$ **d)** $]-3;1[$

Question 5

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=(2x-1)e^x$
La fonction dérivée de la fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $h'(x)=2e^x$ **b)** $h'(x)=(2x+1)e^x$ **c)** $h'(x)=(2x-1)e^x$ **d)** $h'(x)=-e^{-x}$

CORRECTION

Question 1 : **c)** $y=5x+18$

Preuve non demandée

La tangente T passe par les points A(-3;3) et B(0;18).

l'ordonnée à l'origine de T est égale à 18.

Le coefficient directeur est égal à $\frac{18-3}{0-(-3)}=\frac{15}{3}=5$.

L'équation réduite de T est : $y=5x+18$.

Question 2 : **b)**

Preuve non demandée

f est croissante sur [-4;-2[puis décroissante sur]-2;2[puis croissante sur]2;4].

Donc f' est positive sur $]-4;-2[\cup]2;4]$ et négative sur]-2;2[.

On obtient la courbe b).

Question 3 : **b)** $\cos(x+\pi)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$

Preuve non demandée

$\cos(x+\pi)=-\cos(x)$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right)=\cos(-x)=\cos(x)$

$\cos(x+\pi)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$

Question 4 : **b)** $]-1;3[$

Preuve non demandée

$f(x)=-2x^2+4x+6$

$\Delta=4^2-4\times(-2)\times6=16+48=61=8^2>0$ $\quad x_1=\frac{-4+8}{-4}=\frac{4}{-1}=-1$ $\quad x_2=\frac{-4-8}{-4}=\frac{-12}{-4}=3$

Le coefficient de x^2 est négatif donc f est positive sur]-1;3[.

Question 5 : **b)** $h'(x)=(2x+1)e^x$

preuve non demandée

$(e^x)'=e^x \qquad (2x-1)'=2$

$h'(x)=2e^x+(2x-1)e^x=(2x+1)e^x$

EXERCICE 2 (5points)

Un globe-trotteur a comme objectif de parcourir 2 000 km à pied. Il peut parcourir 50 km en une journée, mais, la fatigue s'accumulant, la distance qu'il parcourt diminue de 2 % chaque nouvelle journée.
On note D_n la distance parcourue le $n^{\text{ième}}$ jour.
Le premier jour de son périple, il parcourt donc $D_1 = 50\text{ km}$.

1. Calculer la distance parcourue le deuxième jour.

2. Quelle est la nature de la suite (D_n) ? Donnez ses éléments caractéristiques.

3. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, déterminer l'expression de D_n en fonction de n.

4. Pour calculer le nombre de jours qu'il faudra au globe-trotter pour atteindre son objectif, on a écrit le programme Python suivant :

```
def  nb jours:
  j=1
  u=50
  s=50
  while . . .
    u=0.98*u
    s=s+u
    j= . . .
  return j
```

Compléter les deux lignes incomplètes de ce programme.

5. À l'aide de l'extrait de tableur ci-dessous, déterminer quand le globe-trotter aura atteint son objectif.

	A	B	C
1	j	u	s
2	1	50	50

76	75	11	1951
77	76	11	1962
78	77	11	1972
79	78	11	1983
80	79	10	1993
81	80	10	2003
82	81	10	2013

CORRECTION

1. Le deuxième jour le globe-trotter parcourt la distance de 50 km diminuée de 2 % de 50 km, soit :
$50-\frac{2}{100}\times 50=50-1=49\,\text{km}$.

2. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, le $(n+1)^{\text{ième}}$ jour le globe-trotter parcourt la distance D_n (km) diminuée de 2 % de D_n donc $D_{n+1}=D_n-\frac{2}{100}-D_n=D_n-0{,}02\times D_n=0{,}98\times D_n$

<u>Conclusion</u>
(D_n) est la suite géométrique de premier terme 50 et de raison $q=0{,}98$.

3. Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a :
$D_n=D_1\times q^{n-1}=50\times 0{,}98^{n-1}$

4. L'objectif du globe-trotter est que : $2000\leqslant s$ donc il continue le périple tant que $s<2000$ et j représente le nombre de jours donc on ajoute 1 à j à chaque boucle.
Le programme Python complet est :

```
def  nb jours:
   j=1
   u=50
   s=50
   whiles<2000:
      u=0.98*u
      s=s+u
      j=j+1
   return j
```

5. *<u>Remarque</u>*
Pour les colonnes B et C on a arrondi les résultats à l'unité.

On lit que pour $j=80$ on a $s=2003>2000$ donc l'exécution de ce programme se termine et le programme donnera 80.
<u>Conclusion</u>
Il faut 80 jours pour que le globe-trotter réalise son objectif.

EXERCICE 3 (5points)

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan.
On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre A(2;5) et de rayon 5.

1. Montrer qu'une équation du cercle $\mathscr{C}$ est :
$x^2+y^2-4x-10y=-4$

2. Vérifier que le point B(5;9) appartient à ce cercle.

3. Que peut-on dire de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B et de la droite (AB) ?

4. Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B.

5. Calculer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.

CORRECTION

1. Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre A(2;5) et de rayon 5 est :
$(x-2)^2+(y-5)^2=5^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-10y+25=25 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-10y=-4$

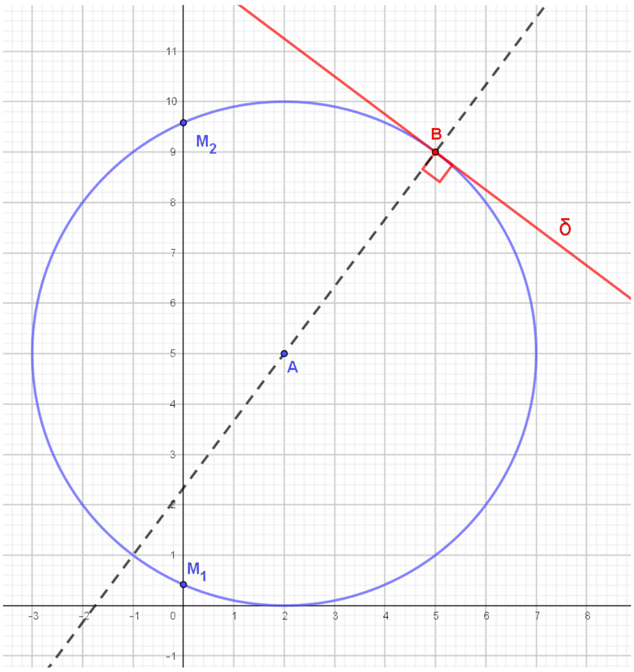
2. B(5;9)
$5^2+9^2-4\times5-10\times9=25+81-20-90=-4$ donc le point B(4;9) appartient au cercle $\mathscr{C}$.

3. La tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point b est perpendiculaire au rayon [AB] donc la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point B est perpendiculaire à la droite (AB).

4. Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est un vecteur normal à la tangente (δ) au cercle $\mathscr{C}$ au point B.
$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$ M(x;y) $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-5\\y-9\end{pmatrix}$
$M\in(\delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BM}=0 \Leftrightarrow -3\times(x-5)-4\times(y-9)=0 \Leftrightarrow -3x+15-4y+26=0$
$\Leftrightarrow 3x+4y-51=0$

5. $\begin{cases}x^2+y^2-4x-10y=-4\\ x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2-10y+4=0\\ x=0\end{cases}$
$y^2-10y+4=0 \quad \Delta=(-10)^2-4\times4\times1=100-16=84=4\times21$
$y_1=\dfrac{10-\sqrt{84}}{2}=\dfrac{10-2\times\sqrt{21}}{2}=5-\sqrt{21}$
$y_2=\dfrac{10+\sqrt{84}}{2}=\dfrac{10+2\times\sqrt{21}}{2}=5+\sqrt{21}$
Les points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées sont :
$M_1(0;5-\sqrt{21})$ et $M_2(0;5+\sqrt{21})$.

Figure non demandée



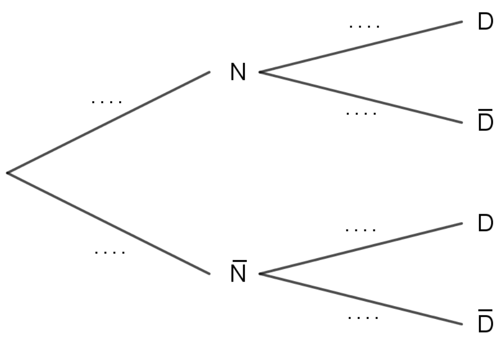
EXERCICE 4 (5 points)

Lors des journées classées « rouges » selon Bison Futé, l'autoroute qui relie Paris à Limoges en passant par Orléans est surchargée.
Lors de ces journées classées « rouges », on a pu observer le comportement des automobilistes faisant le trajet de Paris à Limoges en passant par Orléans.

- Pour le trajet de Paris à Orléans, 30 % d'entre eux prennent la route nationale, les autres prennent l'autoroute.
- Pour le trajet d'Orléans à Limoges :
  - ✔ parmi les automobilistes ayant pris la route nationale entre Paris et Orléans, 40 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute ;
  - ✔ parmi les automobilistes n'ayant pas pris la route nationale entre Paris et Orléans, 45 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute.

On choisit un automobiliste au hasard parmi ceux effectuant en journée classée « rouge », le trajet Paris-Limoges en passant par Orléans.
On note N l'évènement : « l'automobiliste prend la route nationale entre Paris et Orléans et D l'évènement : « l'automobiliste prend la route départementale entre Orléans et Limoges.
Si A est un évènement, on note $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous.



2. Calculer $P(\bar{N} \cap \bar{D})$ et interpréter le résultat.

3. Montrer que la probabilité que l'automobiliste ne choisisse pas la route départementale entre Orléans et Limoges est : 0,565.

Lors de ces journées classées « rouges », on donne les temps de parcours suivants :
Paris-Orléans, par autoroute : 3 heures
Paris-Orléans, par nationale : 2 heures
Orléans-Limoges, par autoroute : 4 heures
Orléans-Limoges, par nationale : 3 heures et demie.

4. Recopier et compléter le tableau ci-dessous,qui donne pour chaque trajet, le temps en heure et la probabilité :

évènement	$N \cap D$	$N \cap \bar{D}$	$\bar{N} \cap D$	$\bar{N} \cap \bar{D}$
temps en heure				
probabilité				

5. Calculer l'espérance de la variable aléatoire qui donne la durée du trajet en heure et en donner une interprétation.

CORRECTION

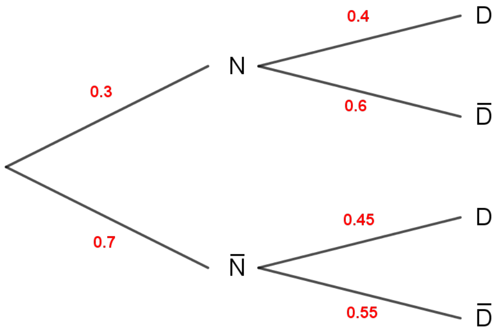
1. Pour le trajet Paris-Orléans, 30 % d'entre eux prennent la route nationale, les autres prennent l'autoroute donc $P(N)=0{,}3$ et $P(\bar{N})=1-0{,}3=0{,}7$.

. Pour le trajet d'Orléans à Limoges :

✔ parmi les automobilistes ayant pris la route nationale entre Paris et Orléans 40 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute donc $P_N(D)=0{,}4$ et $P_N(\bar{D})=1-0{,}4=0{,}6$;

✔ parmi les automobilistes n'ayant pas pris la route nationale entre Paris et Orléans 45 % prennent la route départementale, les autres prennent l'autoroute donc $P_{\bar{N}}(D)=0{,}45$ et $P_{\bar{N}}(\bar{D})=1-0{,}45=0{,}55$.

On obtient l'arbre de probabilités suivant :



2. $P(\bar{N}\cap\bar{D})=P(\bar{N})\times P_{\bar{N}}(\bar{D})=0{,}7\times0{,}55=0{,}385$

La probabilité qu'un automobiliste choisisse de prendre l'autoroute pour le trajet Paris-Limoges est égale à : $0{,}385$.

3. En utilisant l'arbre de probabilités ou la formule des probabilités totales, on obtient :

$P(\bar{D})=P(\bar{D}\cap N)+P(\bar{D}\cap\bar{N})=P(N)\times P_N(\bar{D})+P(\bar{N})\times P_{\bar{N}}(\bar{D})=0{,}3\times0{,}6+0{,}385=0{,}15+0{,}385=0{,}565$

4. Pour $(N\cap D)$ le temps du trajet est : $2+3{,}5=5{,}5$ 5 heures et demie et $P(N\cap D)=0{,}3\times0{,}4=0{,}12$.

Pour $(N\cap\bar{D})$ le temps du trajet est : $2+4=6$ 6 heures et $P(N\cap\bar{D})=0{,}3\times0{,}6=0{,}18$

Pour $(\bar{N}\cap D)$ le temps du trajet est : $3+3{,}5=6{,}5$ 6 heures et demie et $P(\bar{N}\cap D)=0{,}7\times0{,}45=0{,}315$

Pour $(\bar{N}\cap\bar{D})$ le temps du trajet est : $3+4=7$ 7 heures et $P(\bar{N}\cap\bar{D})=0{,}385$

On complète le tableau.

évènement	$N\cap D$	$N\cap\bar{D}$	$\bar{N}\cap D$	$\bar{N}\cap\bar{D}$
temps en heure	5.5	6	6.5	7
probabilité	0.12	0.18	0.315	0.385

5. L'espérance de la variable aléatoire T qui donne la durée du trajet en heure est :

$E(T)=5{,}5\times0{,}12+6\times0{,}18+5{,}5\times0{,}315+7\times0{,}385=0{,}66+1{,}08+2{,}0475+2{,}695=6{,}4825$.

Le temps moyen du trajet Paris-Limoges par un automobiliste est 6 heures 48 minutes.