Sujet 65

EXERCICE 1 (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse devra être justifiée.
Toute justification même non aboutie sera prise en compte.

1. Dans un plan muni d'un repère orthonormé on donne les points :
A(2;-2), B(4;0), C(0;-3), D(-7;1).

Affirmation 1
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Affirmation 2
Une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C est :
y=x-5

Affirmation 3
Une équation du cercle de centre A passant par B est :
$(x-2)^2+(y+2)^2=8$

2. Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

On note f' sa fonction dérivée.

Affirmation 4
$f'(1)=0$

3. On donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Affirmation 5
$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)<0$

CORRECTION

Affirmation 1 FAUSSE

Preuve

Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-7\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=2\times(-7)+2\times6=-2\neq0$

Affirmation 2 FAUSSE

Preuve

(Δ) est la perpendiculaire à (AB) passant par C.

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à (Δ)

(Δ) : $2x+2y+k=0$

C(0,5) $-10+k=0 \Leftrightarrow k=10$

(Δ) : $2x+2y+10=0 \Leftrightarrow x+y+5=0 \Leftrightarrow y=-x-5$

Affirmation 3 VRAIE

Preuve

A(2;-2)

Une équation du cercle de centre A et de rayon R est :

$(x-2)^2+(y+2)^2=R^2$

Ce cercle passe par B(4;0) donc $(4+2)^2+(0+2)^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=8$

Affirmation 4 VRAIE

Preuve

$f(x)=\frac{e^x}{x}$ Pour tout nombre réel x strictement positif on a : $(e^x)'=e^x$

donc $f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ et $f'(1)=0$

Affirmation 5 FAUSSE

Preuve

$0<\frac{2\pi}{5}<\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)>0$

Remarque

On n'utilise pas la valeur donnée de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise produit entre 1 millier et 5 milliers de pièces par jour. Le coût de moyen de production d'une pièce, en milliers d'euros pour x milliers de pièces produites est donné par la fonction f définie pour tout réel $x \in [1;5]$ par : $f(x)=\frac{0,5x^3-3x^2+x+16}{x}$.

1. Calculer le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces.

2. On admet que f est dérivable sur $[1;5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que pour nombre réel $x \in [1;5]$ $f'(x)=\frac{x^3-3x^2-16}{x^2}$.

3. Vérifier que, pour tout réel x, $x^3-3x^2-16=(x-4)(x^2+x+4)$.

4. En déduire le tableau de variation de f sur [1;5].

5. Déterminer le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal, ainsi que la valeur de ce coût minimal.

CORRECTION

1. Le coût moyen, en milliers d'euros, pour la production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces est : $f(2)=\frac{0,5\times 2^3-3\times 2^2+2+16}{2}=\frac{0,5\times 8-3\times 4+2+16}{2}=\frac{4-12+2+16}{2}=5$.

Le coût moyen de production d'une pièce lorsque l'entreprise produit 2 milliers de pièces est : 5000 € .

2. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{v\,u'=u\,v'}{v^2}$

$u(x)=0,5x^3-3x^2+x+16 \qquad u'(x)=1,5x^2-6x+1$

$v(x)=x \qquad v'(x)=5$

Pour tout nombre réel x de l'intervalle [1;5]

$f'(x)=\frac{x\times(1,5x^2-6x+1)-0,5x^3+3x^2-x-16}{x^2}=\frac{x^3-3x^2-16}{x^2}$.

3. Il suffit de développer le second membre.

$(x-4)(x^2+x+4)=x^3+x^2+4x-4x^2-4x-16=x^3-3x^2-16$

4. Le signe de $f'(x)$ sur [1:5] est le signe de $x^3-3x^2-16=(x-4)(x^2+x+4)$.

Or $T(x)=x^2+x+4 \qquad \Delta=1^2-4\times 4=-15<0$ donc pour tout réel x $T(x)>0$ et le signe de $f'(x)$ est le signe de $x-4$.

Tableau de variation de f

x	1		4		5
f ' (x)		−	0	+	
f(x)	14.5	↘	1	↗	1.7

$f(1)=14,5 \qquad f(5)=\frac{0,5\times 125-3\times 25+5+16}{5}=\frac{62,5-75+5+16}{5}=\frac{8,5}{5}=1,7 \qquad f(4)=\frac{32-48+4+16}{4}=1$

5. Il faut fabriquer 4000 pièces pour que le coût moyen de production d'une pièce soit minimal.

Ce coçut minimal est égal à 1000 €.

EXERCICE 3 (5 points)

Un complexe cinématographique a ouvert ses portes en 2018 en périphérie d'une ville.
En 2018, le complexe a accueilli 180 mille spectateurs.
Le gestionnaire du complexe prévoit une augmentation de 4 % par an de la fréquentation du complexe.
Soit n un entier naturel. On note u_n le nombre de spectateurs, en milliers, du complexe cinématographique pour l'année (2018+n). On a donc $u_0=180$.

1. Étude de la suite (u_n) .
1.a. Calculer le nombre de spectateurs en 2019.
1.b. Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.
1.c. Exprimer u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

2. Un cinéma étant déjà installé au centre ville.
En 2018, il a accueilli 260 000 spectateurs.
Avec l'ouverture du complexe, le cinéma du centre ville prévoit de perdre 10 000 spectateurs par an.
Pour n, entier naturel, on note v_n le nombre de spectateurs, en milliers, accueillis dans le cinéma de centre ville l'année (2018+n). On a donc $v_0=260$.
2.a. Quelle est la nature de la suite (v_n) .
2.b. On donne le programme ci-dessous, écrit en python.

```
def cinema():
  n=0
  u=180
  v=260
  while u<v:
    n=n+1
    u=1.04xu
    v=v-10
  return n
```

Quelle est la valeur renvoyée lors de l'exécution du programme de la fonction cinéma( ).
L'interpréter dans le contexte de l'exercice .

CORRECTION

1.a. Le nombre de spectateurs (en milliers) en 2019=2018+1 est égal à u_1 .
Le nombre de spectateurs en 2019 augmente de 4 % par rapport au nombre de spectateurs de 2018.

$$u_1 = u_0 + \frac{4}{100} \times u_0 = 180 + \frac{4}{100} \times 180 = 180 + 7,0 = 187,2$$

Le nombre de spectateurs en 2019 est : 187 200 .

1.b. Pour tout entier naturel n, le nombre de spectateurs (en milliers) en (2018+n+1) est égal au nombre de spectateurs en (2018+n) augmenté de 4 % de ce nombre.

$u_{n+1} = u_n + \frac{4}{100} u_n = 1,04\, u_n$ et (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04 .

1.c. $u_n = u_{09}\, q^n = 180 \times 1,04^n$.

2.a. Pour tout entier naturel n, le nombre de spectateurs l'année (2018+n+1) est égal au nombre de spectateurs l'année (2018+n)diminuée de 10000.
Donc en milliers de spectateurs, $v_{n+1} = v_n - 10$ et (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -10$.
$v_n = v_0 - nr = 260 - 10n$.

2.b. On calcule les valeurs successives de u_n et v_n .
On arrondit v_n à 10^{-3} pour avoir un nombre entier de spectateurs.

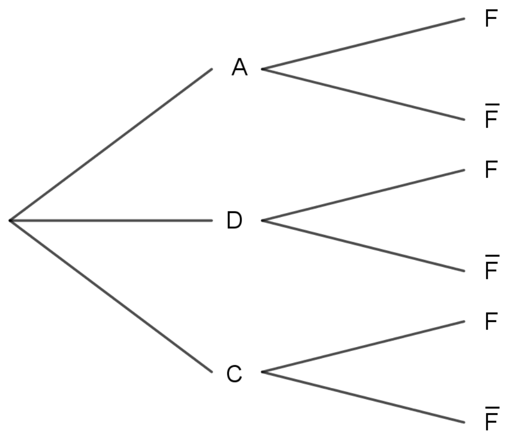
n	u_n	v_n	$u_n < v_n$
0	180	260	VRAI
1	187.2	250	VRAI
2	194.688	240	VRAI
3	202.476	230	VRAI
4	210.575	220	VRAI
5	218.998	210	FAUX

Donc la valeur renvoyée lors de l'exécution du programme sera : 5 .
Interprétation dans le contexte de l'exercice : 2018+5=2023 sera la première année pour laquelle le complexe cinématographique aura plus dev spectateurs que le cinéma de centre ville.
Remarque :
Si on veut exécuter le programme python, on ajoute une ligne, au niveau de la première :
print(cinema ()) et on obtient : 5 .

EXERCICE 4 (5points)

La gestionnaire d'un cinéma s'intéresse à la catégorie des films vus par les spectateurs , ainsi qu'à la consommation au rayon « friandise ».
Une étude sur plusieurs mois a montré que 40 % des spectateurs sont allés un film d'action, 35 % un dessin animé et les autres une comédie.
Parmi les spectateurs allant voir un film d'action, la moitié achètent des friandises , alors qu'ils sont 80 % pour ceux allant voir un dessin animé et 70 % pour ceux allant voir une comédie.
On interroge au hasard un spectateur sortant du cinéma et note :
A l'événement ; « le spectateur a vu un film d'action » ,
D l'événement : « le spectateur a vu un dessin animé »,
C l'événement : « le spectateur a vu une comédie »,
F l'événement : « le spectateur a acheté des friandises ».

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous représentant la situation.



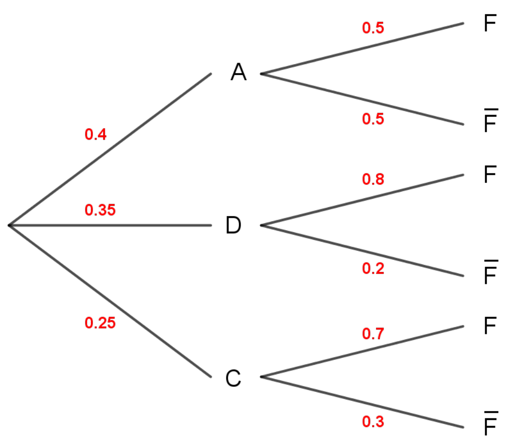
2. Démontrer que P(F)=0,655.

3. On interroge au hasard un spectateur ayant acheté des friandises. Quelle est la probabilité qu'il ait vu un dessin animé ?
On donnera l'arrondi à 10^{-3} .

4. Une place de cinéma coûte 10€. On considéra que si un spectateur achète des friandises, il dépense 18€ pour sa place de cinéma et ses friandises.
On note X la variable aléatoire donnant le coût d'une sortie au cinéma pour un spectateur.
4.a. Déterminer la loi de probabilité de X.
4.b. En déduire le coût moyen par spectateur d'une sortie dans ce cinéma.

CORRECTION

1. 40 % des spectateurs sont allés voir un film d'action, 35 % un dessin animé et les autres une comédie donc :
$P(A)=0{,}4$ $P(D)=0{,}35$ et $P(C)=1-P(A)-P(D)=1-0{,}4-0{,}35=0{,}25$
La moitié des spectateurs allant voir un film d'action ont acheté des friandises donc :
$P_A(F)=0{,}5$ et $P_A(\bar{F})=1-0{,}5=0{,}5$
80 % des spectateurs allant voir un dessin animé achètent des friandises donc :
$P_D(F)=0{,}8$ et $P_D(\bar{F})=1-2{,}5=0{,}5$
70 % des spectateurs allant voir une comédie achètent des friandises donc :
$P_C(F)=0{,}7$ et $P_C(\bar{F})=1-0{,}7=0{,}3$
On obtient l'arbre de probabilités suivant :



2. En utilisant la formule des probabilités totales.
$P(F)=P(A\cap F)+P(D\cap F)+P(C\cap F)=P(A)\times P_A(F)+P(D)\times P_D(F)+P(C)\times P_C(F)$
$P(F)=0{,}5\times 0{,}5+0{,}35\times 0{,}8+0{,}25\times 0{,}7=0{,}2+0{,}28+0{,}175=0{,}655$

3. On nous demande de calculer $P_F(D)$

$$P_F(D)=\frac{P(F\cap D)}{P(F)}=\frac{0{,}28}{0{,}655}=\frac{280}{655}=0{,}427$$

4.a. X prend deux valeurs 10 et 18.
P(X=18)=P(F)=0,655 P(X=10)=1-0,655=0,345
Loi de probabilité de X.

x_i	10	18
$P(x_i)$	0.345	0.655

4.b. Le coût moyen par spectateur rst égal à l'espérance mathématique de X.
$E(X)=10\times 0{,}345+18\times 0{,}655=3{,}45+11{,}79=15{,}24$ €