# Sujet 7

## EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

**Question 1**
On considère les points E(3 ;-4) et F(7;2). La droite (EF) passe par le point :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) A(0;8) | b) B(5.5;0) | c) C(13;11) | d) D(-25;45) |

**Question 2**
On considère la droite D qui a pour équation réduite $y=-2x+4$ .
Parmi les vecteurs suivants, déterminer celui qui est un vecteur normal de la droite D.

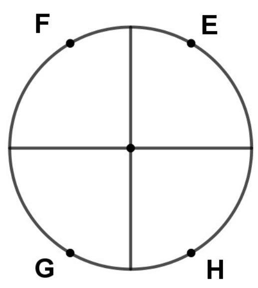
| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $\vec{n_1}(2;1)$ | b) $\vec{n_2}(-1;2)$ | c) $\vec{n_3}(1;-2)$ | d) $\vec{n_4}(-2;1)$ |

**Question 3**
Soit ABCD un carré de côté 6 et I le milieu de [BC].
Alors le produit scalaire $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$ vaut :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) -18 | b) 18 | c) 36 | d) $9\sqrt{5}$ |

**Question 4**
Sur le cercle trigonométrique ci-dessous $\frac{14\pi}{3}$ a pour image le point :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) E | b) F | c) G | d) H |




**Question 5**
Soit le réel x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, tel que $\sin(x)=0{,}8$ . Alors :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) cos(x)=0.6 | b) cos(x)=-0.6 | c) cos(x)=0.2 | d) cos(x)=-0.2 |

## CORRECTION

**Question 1 Réponse : c**

*Preuve non demandée*

Le point M appartient à la droite (EF) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EM}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EA}\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}2,5\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}-28\\49\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}4 & -3\\6 & 12\end{vmatrix}=48+18=66\neq 0$ ; $\begin{vmatrix}4 & 2,5\\6 & 4\end{vmatrix}=16-15=1\neq 0$ ; $\begin{vmatrix}4 & 10\\6 & 15\end{vmatrix}=60-60=0$ ; $\begin{vmatrix}4 & -28\\6 & 49\end{vmatrix}=196+168=364\neq 0$

Le point C appartient à la droite (EF).

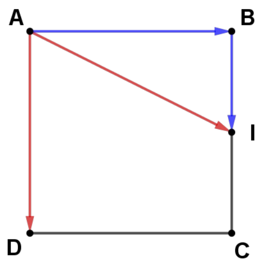
**Question 2 Réponse : a**

*Preuve non demandée*

$y=-2x+4 \Leftrightarrow 2x+y-4=0$ Le vecteur $\vec{N}(2;1)$ est un vecteur normal à la droite D et $\vec{N}=\vec{n}_1$.

**Question 3 Réponse : b**

*Preuve non demandée*




$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BI}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BI}=AD\times BI=6\times 3=18$.

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BI}=18$

**Question 4 Réponse : a**

*Preuve non demandée*

On effectue la division euclidienne de 14 par $2\times 3=6$.

$14=6\times 2+2$ donc $\frac{14\pi}{3}=\frac{6\times 2\times\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2\times 2\pi$.

Or $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE})=\frac{2\pi}{3}$

**Question 5 Réponse : b**

*Preuve non demandée*

Si x appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors $\cos(x)<0$ et on a $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

$\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=1-0,8^2=1-0,64=0,36=0,6^2$

donc $\cos(x)=-0,6$.

## EXERCICE 2 (5 points)

Un magasin de téléphonie mobile lance une offre sur les smartphones de la marque Pomme vendus pour 800€ : il propose une assurance complémentaire pour 50€ ainsi qu'une coque à 20€.
Ce magasin a fait des constatations suivantes concernant les acheteurs de ces smartphones :

- 40 % des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire.
- Parmi les acheteurs qui ont souscrit à l'assurance complémentaire, 20 % ont acheté en plus la coque.
- Parmi les acheteurs qui n'ont pas souscrit à l'assurance complémentaire, deux sur trois n'ont pas acheté la coque.

On interroge au hasard un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.
On considère les événements suivants :
A : « le client a souscrit à l'assurance complémentaire » ;
C : « le client a acheté la coque ».

**1.** Calculer la probabilité quele client ait souscrit à l'assurance complémentaire et ait acheté la coque.

**2.** Montrer que $P(C)=0,28$.

**3.** Le client interrogé a acheté la coque. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas souscrit à l'assurance complémentaire.

**4.** Déterminer la dépense moyenne d'un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.
On pourra noter $X$ la variable aléatoire qui représente la dépense en euros d'un client de ce magasin ayant acheté un smartphone de la marque Pomme.

**CORRECTION**

**1.** L'énoncé précise :
40 % des acheteurs ont souscrit à l'assurance complémentaire donc :
$P(A)=\frac{40}{100}=0{,}4$ et $P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}4=0{,}6$.
Parmi les acheteurs qui ont suivi l'assurance complémentaire, 20 % ont acheté en plus la coque donc :
$P_A(C)=\frac{20}{100}=0{,}2$ et $P_A(\bar{C})=1-P_A(C)=1-0{,}2=0{,}8$.
. On nous demande de calculer $P(A\cap C)$.
$P(A\cap C)=P(A)\times P_A(C)=0{,}4\times 0{,}2=0{,}08$

**2.** L'énoncé précise :
Parmi les acheteurs qui n'ont pas souscrit à l'assurance, deux sur tois n'ont pas acheté la coque donc :
$P_{\bar{A}}(\bar{C})=\frac{2}{3}$ et $P_{\bar{A}}(C)=1-P_{\bar{A}}(\bar{C})=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.
. En utilisant la formule des probabilités totales :
$P(C)=P(A\cap C)+P(\bar{A}\cap C)=0{,}08+P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(C)=0{,}008+0{,}6\times\frac{1}{3}$
$P(C)=0{,}08+0{,}2=0{,}28$.

**3.** On nous demande de calculer : $P_C(\bar{A})$.
$P_C(\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}2}{0{,}28}=\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$.

**4.** Il y a 4 possibilités.
. On considère l'événement : $(\bar{A}\cap\bar{C})$ ; $X(\bar{A}\cap\bar{C})=800$.
. On considère l'événement : $(\bar{A}\cap C)$ ; $X(\bar{A}\cap C)=800+20=820$.
. On considère l'événement : $(A\cap\bar{C})$ ; $X(A\cap\bar{C})=800+50=850$.
. On considère l'événement : $(A\cap C)$ ; $X(A\cap C)=800+50+20=870$.
. $P(\bar{A}\cap\bar{C})=P(X=800)=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(\bar{C})=0{,}6\times\frac{2}{3}=0{,}4$.
. $P(\bar{A}\cap C)=P(X=820)=P(\bar{A})\times P_{\bar{A}}(C)=0{,}6\times\frac{1}{3}=0{,}2$.
. $P(A\cap\bar{C})=P(X=850)=P(A)\times P_A(\bar{C})=0{,}4\times 0{,}8=0{,}32$.
. $P(A\cap C)=P(X=870)=P(A)\times P_A(C)=0{,}4\times 0{,}2=0{,}08$.
On donne la loi de probabilité de $X$ sous la forme d'un tableau.

| $x_i$ | 800 | 820 | 850 | 870 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | 0.4 | 0.2 | 0.32 | 0.08 |

La dépense moyenne d'un client est égale à l'espérance mathématique de $X$.
$E(X)=0{,}4\times 800+0{,}2\times 820+0{,}32\times 870+0{,}08\times 870=320+164+272++69{,}6=825{,}6$.
La dépense moyenne d'un client est : 825,60€.

## EXERCICE 3 (5 points)

On considère les deux suites suivantes :

- la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel n par : $u_n=\frac{8n-4}{n+1}$
- la suite $(v_n)$ définie par $v_0=0$ et $v_{n+1}=0{,}5\times v_n+3{,}5$ pour tout entier naturel n.

**1.** Calculer les termes d'indice 3 des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

**2.** On s'intéresse aux variations de la suite $(u_n)$.

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{8x-4}{x+1}$.

**2.a.** Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.

**2.b.** En déduire la monotonie de la suite $(u_n)$.

**3.** On considère l'affirmation suivante : « pour tout entier naturel n, $u_n<v_n$ ».
Camille pense que cette affirmation est vraie alors que Dominique pense le contraire.
Pour les départager, on utilise le programme suivant en Python.

```
def algo():
  n=0
  u=-4
  v=0
  while u<v:
    n=n+1
    u=(8*n-4)/(n+1)
    v=0.5*v+3.5
  return(n)
```

Le programme renvoie la valeur 11.
Qui de Camille ou Dominique a raison ? Expliquer.

## CORRECTION

**1.** $u_3=\frac{8\times 3-4}{3+1}=\frac{20}{4}=5$ .

Pour calculer $v_3$ il est nécessaire de calculer $v_1$ puis $v_2$ .

$v_1=0{,}5\,v_0+3{,}5=0{,}5\times 0+3{,}5=3{,}5$

$v_2=0{,}5\times v_1+3{,}5=0{,}5\times 3{,}5+3{,}5=1{,}75+3{,}5=5{,}25$

$v_3=0{,}5\times v_2+3{,}5=0{,}5\times 5{,}25+3{,}5=2{,}625+3{,}5=6{,}125$ .

**2.a.** $f(x)=\frac{8x-4}{x+1}$ définie sur $[0;+\infty[$ .

$f$ est dérivable sur $[0;\infty[$ .

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$ u(x)=8x-4 u'(x)=8 v(x)=x+1 v'(x)=1

$f'(x)=\frac{8\times(x+1)-(8x-4)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{8x+8-8x+4}{(x+1)^2}=\frac{12}{(x+1)^2}$ .

Pour tout nombre réel $x$ de l'intervalle $[0;+\infty[$ $f'(x)>0$ donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ .

**2.b.** Pour tout entier naturel n, on a $n<n+1$ donc $f(n)<f(n+1)$ soit $u_n<u_{n+1}$ et la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

**3.** C'est Dominique qui a raison.

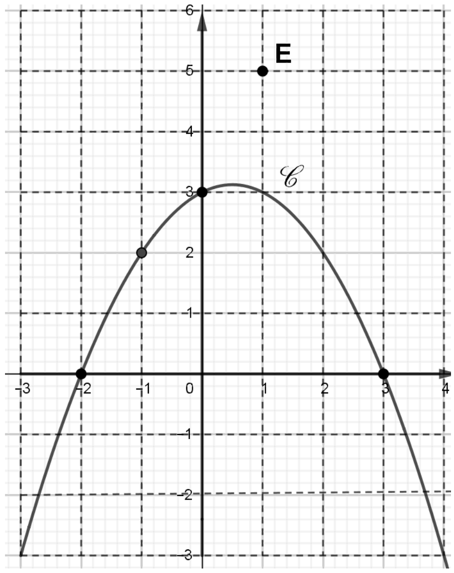
Car l'exécution du programme Python nous précise que : $v_{11}\leqslant u_{11}$ .

Remarque :

Par le calcul on trouve que $u_{11}=7$ et $v_{11}=6{,}997$ (arrondi au millième).

**EXERCICE 4 (5 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.




**1.** Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x)=0$ d'inconnue x.

**2.** On donne $f'(x)=-x+0{,}5$ pour tout nombre réel x.
Déterminer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1 est $y=1{,}5x+3{,}5$ .

**3.** On considère le point E de coordonnées (1;5).
Dans cette question, on cherche à déterminer les points de la courbe $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente passe par le point E.

**3.a.** Montrer que le point E appartient à la tangente T.

**3.b.** Déterminer l'autre point de la courbe en lequel la tangente passe par le point E.

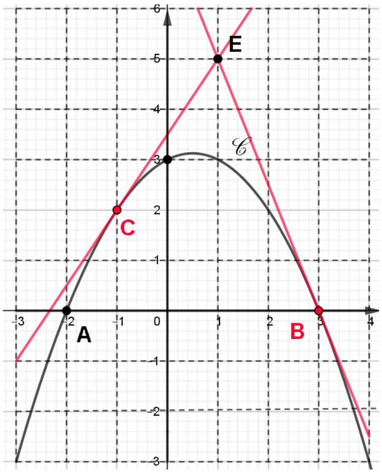
## CORRECTION

**1.** Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
Il y a deux points d'intersection $A(-2;0)$ et $B(3;0)$. $\mathscr{S}=\{ -2;3 \}$.
$f'(x)=2ax+b$

**2.** Par lecture graphique, on détermine l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse -1, on obtient : 2.
On note : C(-1;2).
$f'(-1)=1+0,5=1,5$ donc la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point $C$ est la droite passant par $c$ et de coefficient directeur : 1,5.
$(T): y=1,5x+p$ $\quad C(-1;2)$ donc $2=-1,5+p \Leftrightarrow p=3,5$
$(T):\ y=1,5x+3,5$.

**3.a.** E(1;5) $\quad 1,5\times1+3,5=5$ donc $E$ appartient à la tangente $T$ à $\mathscr{C}$ au point $C$.

**3.b.** Si, pour tout nombre réel x, $f'(x)=-x+0,5$ alors $f(x)=ax^2+bx+c$ avec a, b et c nombres réels à déterminer.
$f'(x)=2ax+b=-x+05$ donc $2a=-1 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2}=-0,5$ et $b=0,5$.
$f(x)=-0,5x^2+0,5x+c$
$\mathscr{C}$ passe par le point C(-1;2) donc : $-0,5\times(-1)^2+0,5\times(-1)+c=2 \Leftrightarrow -1+c=2 \Leftrightarrow c=3$.
$f(x)=-0,5x^2+0,5x+3$
On veut déterminer $x_0$ abscisse d'un point de la courbe $\mathscr{C}$ dont la tangente ence point passe par E.
$M_0(x_0;y_0)$ $\quad y_0=-0,5x_0^2+0,5x_0+3$
On veut déterminer l'équation réduite d'une tangente à $\mathscr{C}$ en $M_0$ passant par E.
$y=mx+p$
$m=f'(x_0)=-x_0+0,5$ $\quad y=(-x_0+0,5)x+p$
Cette droite passe par le point E.
$5=(-x_0+0,5)\times1+p \Leftrightarrow p=x_0+4,5$ $\quad y=(-x_0+0,5)x+x_0+4,5$
Cette droite passe par $M_0(x_0;y_0)$
$y_0=(-x_0+0,5)x_0+x_0+4,5=-x_0^2+1,5x_0+4,5$.
Donc $\begin{cases} y_0=-x_0^2+1,5x_0+4,5 \\ y_0=-0,5x_0^2+0,5x_0+3 \end{cases}$
On obtient : $-x_0^2+1,5x_0+4,5=-0,5x_0^2+x_0+3 \Leftrightarrow -0,5x_0^2+x_0+1,5=0$
$\Delta=1^2-4\times(-0,5\times1,5)=1+3=4=2^2$
$x_0'=\frac{-1+2}{2\times(-0,5)}=-1$ $\quad x_0''=\frac{-1-2}{2\times(-0,5)}=3$
Or $f(3)=0$ et B(3;0).
Il existe deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par $E$, la première la droite (EC) et la deuxième la droite (EB).
On donne une figure non demandée.


E
$\mathscr{C}$
C
A
B
0