Sujet 8

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

$\dfrac{e^{5x}}{e^{2x-2}}$ est égal à :

a) e^{3x+2}	b) e^{3x-2}	c) $e^{2.5x-2.5}$	d) e^{7x-2}

Question 2

Soit la suite définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=3u_n-2$ pour $n\in\mathbb{N}$

a) $u_3=7$	b) $u_3=10$	c) $u_3=28$	d) $u_3=4$

Question 3

Dans un atelier, 3 % des pièces produites sont défectueuses. On constate qu'au cours du contrôle de qualité, si la pièce est bonne elle est acceptée dans 95 % des cas, et que si elle est défectueuse, elle est refusée dans 98 % des cas.
La probabilité qu'une pièce soit refusée est égale à

a) 0.0779	b) 0.0294	c) 0.0485	d) 0.98

Question 4

Sachant que $\cos(x)=\dfrac{5}{13}$ et que x est compris entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et 0, la valeur de sin(x) est :

a) $\dfrac{8}{13}$	b) $-\dfrac{5}{13}$	c) $\dfrac{12}{13}$	d) $-\dfrac{12}{13}$

Question 5

La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i	-2	0	5
$p_i=P(X=x_i)$	0.3	0.5	0.2

L'espérance E(X) de la variable aléatoire X est égale à :

a) 3	b) 0.9	c) 0.4	d) 0.5

CORRECTION

Question 1 Réponse : a

Preuve non demandée

$$\frac{e^{5x}}{e^{2x-2}}=e^{5x-(2x-2)}=e^{3x+2}$$

Question 2 Réponse : c

Preuve non demandée

$u_1=3\times2-2=4$ $u_2=3\times4-2=10$ $u_3=3\times10-2=28$

Question 3 Réponse : a

Preuve non demandée

On note :

D l'événement : « la pièce choisie au hasard est défectueuse ».

$\bar{D}$ est l'événnement : « la pièce choisie au hasard est bonne ».

R l'événement : « la piècce choisie au hasard est refusée ».

$\bar{R}$ est l'événement : « la pièce choisie au hasard n'est pas refusée ».

L'énoncé précise :

$P(D)=0{,}03$ et $P(\bar{D})=1-P(D)=1-0{,}03=0{,}97$

$P_{\bar{D}}(\bar{R})=0{,}95$ et $P_{\bar{D}}(R)=1-P_{\bar{D}}(\bar{R})=1-0{,}95=0{,}05$

$P_D(R)=0{,}98$ et $P_D(\bar{R})=1-P_D(R)=1-0{,}98=0{,}02$

En utilisant la formule des probabilités totales

$P(R)=P(D\cap R)+P(\bar{D}\cap R\,])=0{,}03\times0{,}98+0{,}97\times0{,}05$

$P(R)=0{,}0294+0{,}0485=0{,}0779$

Question 4 Réponse : d

Preuve non demandée

Si x est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ est 0 alors sin(x) < 0.

D'autre part $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(x)=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{169-25}{169}=\frac{144}{169}=\left(\frac{12}{13}\right)^2$

donc $\sin(x)=-\frac{12}{13}$.

Question 5 Réponse : c

Preuve non demandée

$E(X)=-2\times0{,}3+0\times0{,}5+5\times0{,}2=-0{,}6+1=0{,}4$

EXERCICE 2 (5 points)

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par u_n le nombre d'abonnés en (2019+n) pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020 et 2021.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

CORRECTION

1. Chaque année le musicien obtient 750 abonnés supplémentaires donc :
$u_1 = u_0 + 750 = 6000 + 750 = 6750$.
Il y aura 6750 abonnés en 2020.
$u_2 = u_1 + 750 = 6750 + 750 = 7500$.
Il y aura 7500 abonnés en 2021.

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 750$.

3. (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=750$.

4. Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr = 6000 + 750n$

5. On doit déterminer le plus petit entier naturel n tel que :
$u_n \geqslant 3 \times u_0 \quad \Leftrightarrow \quad 6000 + 750n \geqslant 3 \times 6000 \quad \Leftrightarrow \quad 750n \geqslant 2 \times 6000 \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \frac{12000}{750} = 16$.
En $2019 + 16 = 2035$ le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019.

EXERCICE 3 (5 points)

Un médicament contre la douleur est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang, en milligramme par litre de sang, est modélisée par la fonction f qui , au temps écoulé x en heure, x étant compris entre 0 et 6, associe : $f(x)=x^3-12x^2+36x$ où $x\in[0;6]$.
Le produit actif est efficace si la concentration dans le sang est supérieure ou égale à 5ml/L.

1. En exécutant le script Python ci-dessous, on obtient la liste [0,1,1,1,1,1,0].

```
liste=[0,0,0,0,0,0,0]
for x in range(0,7):
  if x**3-12*x**2+36x>=5:
    liste[x]=1
print(liste)
```

À l'aide de ce résultat, indiquer l'intervalle de temps en unité d'heures sur lequel le médicament est efficace.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur [0;6].
Calculer sa fonction dérivée.

3. Justifier que la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 4 admet pour équation réduite : $y=-12x+64$.

4. Démontrer que $f(x)-(-12x+64)=(x-4)^3$.

5. En déduire la position relative de f par rapport à la tangente T au point A.

CORRECTION

1. On a f(0)=0 et la liste obtenue par exécution du script python : [0,1,1,1,1,1,0] nous indique que : $f(1)\geqslant 5$; $f(2)\geqslant 5$; $f(3)\geqslant 5$; $f(4)\geqslant 5$; $f(5)\geqslant 5$; $f(6)<5$.
On peut donc indiquer que le traitement est efficace sur l'intervalle [1;5].

2. Pour tout nombre réel de l'intervalle [0;6], $f(x)=x^3-12x^2+36x$.
Donc $f'(x)=3x^2-12\times(2x)+36=3x^2-24x+36$.

3. $f(4)=4^3-12\times 4^2+36\times 4=64-192+144=16$ $\quad A(4;16)$.
$f'(4)=3\times 4^2-24\times 4+36=48-96+36=-12$
T est la droite de coefficient directeur -12 et passant par le point A.
T : y=-12x+b $\quad 16=-12\times 4+b \quad \Leftrightarrow \quad b=16+48=64$
T : $y=-12x+64$

4. $f(x)-(-12x+64)=x^3-12x^2+36x+12x-6=x^3-12x^2+48x-64$.
$(x-4)^3=x^3+3\times(-4)x^2+3\times(-4)^2x+(-4)^3=x^3-12x^2+48x-64$.
Donc $f(x)-(-12x+64)=(x-4)^3$.

5. On note $(O;\vec{i};\vec{j})$ le repère du plan.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0;6],
$M(x;f(x))$ appartient à C la courbe représentative de f.
$P(x;-12x+64)$ appartient à la tangente T à C au point A.
$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}0\\ f(x)-(-12x+64)\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{PM}=[f(x)-(-12x+64)]\vec{j}=(x-4)^3\vec{j}$.
Si $4<x\leqslant 6$ alors $(x-4)^3>0$ et le point M est au dessus du point P donc C est au dessus de T.
Si $0\leqslant x<4$ alors $(x-4)^3<0$ et le point P est en dessous du point M donc C est en dessous de T.

EXERCICE 4 (5 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point A de coordonnées $(3;1)$ ainsi que la droite (d) d'équation cartésienne : $x-3y-4=0$.

1. Déterminer les coordonnées du point B d'abscisse 7 appartenant à la droite (d).

2. Donner un vecteur normal à la droite (d).

3. Déterminer une équation de la droite (Δ) perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A.

4. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A à la droite (d).

5. Calculer la distance AH et en donner une interprétation.

CORRECTION

1. $(\mathrm{d}):\ x-3y-4=0$
$7-3y-4=0 \Leftrightarrow 3y=3 \Leftrightarrow y=1$ $\quad$ $\mathrm{B}(7;1)$.

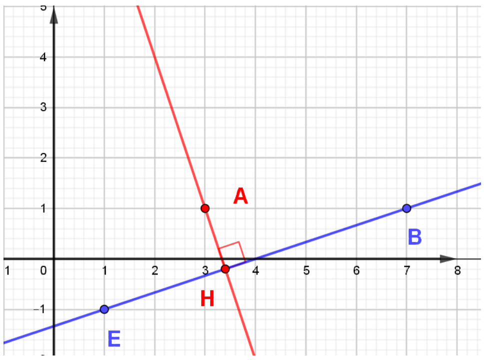
2. $\vec{\mathrm{N}}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d).

3. Δ est la droite passant par A(3;1) est de vecteur directeur $\vec{\mathrm{N}}$.
$\mathrm{M}(x;y)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\end{pmatrix}$
$\mathrm{M}(x;y)$ appartient à Δ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{\mathrm{N}}$ sont colinéaires
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-3 & 1\\ y-1 & -3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -3\times(x-3)-1\times(y-1)=0 \Leftrightarrow -3x+9-y+1=0 \Leftrightarrow -3x-y+10=0$

4. Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H d'intersection des droites (d) et Δ.
$\begin{cases} x-3y-4=0\\ -3x-y+10=0\end{cases}$
$3\times(x-3y-4)-3x-y+10=0 \Leftrightarrow 3x-9y-12-3x-y+10=0 \Leftrightarrow -10y-2=0 \Leftrightarrow y=-0{,}2$
$x-3\times(-0{,}2)-4=0 \Leftrightarrow x=-0{,}6+4=3{,}4$
$\mathrm{H}(3{,}4;-0{,}2)$

5. $\mathrm{A}(3;1)$ $\quad$ $\mathrm{H}(3{,}4;-0{,}2)$ $\quad$ $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\begin{pmatrix}0{,}4\\-1{,}2\end{pmatrix}$.
$\mathrm{AH}^2=0{,}4^2+(-1{,}2)^2=0{,}16+1{,}44=1{,}6$ $\quad$ $\mathrm{AH}=\sqrt{1{,}6}$ en unité de longueur.
AH est la plus petite distance du point A à un point de la droite (d).

On donne une figure non demandée.



$\mathrm{E}(1;-1)$ est un point de la droite (d).