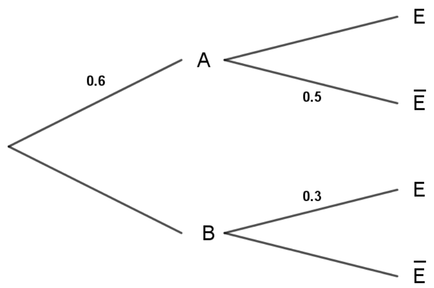
Sujet 9

EXERCICE 1 (5 points)

Cet exercice est un QCM et comprend cinq questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Pour chaque question, indiquer le numéro de la question et recopier la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée, mais il peut être nécessaire d'effectuer des recherches au brouillon pour aider à déterminer votre réponse.
Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse incorrecte ou une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point.

Question 1

On choisit au hasard un individu parmi les passagers en transit dans un aéroport.
On a représenté ci-dessous un arbre de probabilités lié à certains événements dont certains sont effacés.
On considère les événements suivants :
A : « le passager parle anglais »
B : « le passager ne parle pas anglais »
E : « le passager est un membre de l'union européenne ».



Alors :

a) $P_B(E)=0.12$	b) $P(E)=0.42$	c) $P(B\cap E)=0.3$	d) $P(A\cup B)=1.1$

Question 2
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit D la droite d'équation : $3x+y-2=0$.
Alors :

a	b	c	d
le point de coordonnées (6;-15) appartient à la droite D	D est perpendiculaire à la droite d'équation 12x+4y=0	le vecteur de coordonnées (1;3) est un vecteur directeur de D	le vbecteur de coordonnées (3;1) est un vecteur directeur des droites perpendiculaires à la droite D

Question 3
On considère dans l'ensemble des réels l'équation trigonométrique $\sin x=1$.
Alors :

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

a	b	c	d
cette équation admet une unique solution dans l'ensemble des nombres réels	cette équation admet une infinité de solutions dans l'ensemble des nombres réels	2π est une solution de cette équation	$-\frac{57\pi}{2}$ est une solution de cette équation

Question 4

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ et C sa courbe représentative.

Alors

a	b	c	d
La courbe C n'admet pas de tangente au point d'abscisse 0	La tangente à C au point d'abcisse 0 a pour équation: y=2x	La tangente à C au point d'abscisse 0 à pour coefficient directeur: 1	La tangente à C au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Question 5

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$.

f est dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ et pour tout nombre réel de $]-2;+\infty[$ on a :

a $f'(x)=1$	b $f'(x)=\frac{2x-1}{(x+2)^2}$	c $f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}$	d $f'(x)=2x-1$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

Question 1 **Réponse : b**

Preuve non demandée

. On détermine les valeurs manquantes de l'arbre de probabilités.

$B=\bar{A}$ donc $P(B)=1-0{,}6=0{,}4$

$P_A(\bar{E})=0{,}5$ donc $P_A(E)=1-0{,}5=0{,}5$

$P_B(E)=0{,}3$ donc $P_B(\bar{E})=1-0{,}3=0{,}7$

. $P_B(E)=0{,}3\neq 0{,}12$

. En utilisant la formule des probabilités totales.

$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=0{,}6\times 0{,}5+0{,}4\times 0{,}3=0{,}3+0{,}12=0{,}42$

. $P(B\cap E)\,0{,}4\times 0{,}3=0{,}12\neq 0{,}3$

. $B=\bar{A}$ donc $P(A\cup B)=1\neq 1{,}1$.

Question 2 **Réponse : d**

Preuve non demandée

$D:\ 3x+y-2=0$ $\quad \vec{N}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D non nul donc un vecteur directeur de toutes droites perpendiculaires à D.

Question 3 **Réponse : b**

Preuve non demandée

$\sin(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \right. \qquad k\in\mathbb{Z}$.

Cette équation admet une infinité de solutions dans l'ensemble des nombres réels.

Question 4 **Réponse : c**

Preuve non demandée

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2} \qquad u(x)=2x \qquad u'(x)=2 \qquad v(x)=x^2+1 \qquad v'(x)=2x$

$f'(x)=\frac{2\times(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$.

$f(0)=0$ et $f'(0)=2$ La tangente à la courbe C au point d'abscisse 0, passe par l'origine et a pour pour coefficient directeur : 2 donc pour équation réduite : y=2x.

Question 5 **Réponse : c**

Preuve non demandée

$u(x)=x-3 \qquad u'(x)=1 \qquad v(x)=x+2 \qquad v'(x)=1$

$f'(x)=\frac{1\times(x+2)-1\times(x-3)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

EXERCICE 2 (5 points)

À la naissance de Lisa, sa grand-mère a placé la somme de 5000 euros sur un compte et cet argent est resté bloqué pendant 18 ans.
Lisa retrouve dans les papiers de sa grand-mère l'offre de la banque.

Offre
intérêts composés au taux annuel constant de 3% A la fin de chaque année le capital produit 3% d'intérêts qui sont intégrés au capital.

On considère que l'évolution du capital acquis,en euro, peut-être modélisée par une suite (u_n) dans laquelle, pour tout entier naturel n, u_n est le capital acquis, en euro, n années après lanaissance de Lisa.
On a ainsi : $u_0=5000$.

1. Montrer que $u_1=5150$ et $u_2=5304{,}5$.

2.a. Pour tout entier naturel n, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) en précisant sa raison et son premier terme.

2.b. Pour tout entier naturel n,exprimer u_n en fonction de n.

3. Calculer le capital acquis par Lisa à l'âge de 18 ans. Arrondir au centième.

4. Si Lisa n'utilise pas le capital dès ses 18 ans, Quel âge aura-t-elle quand celui-ci dépassera 10000 euros ?

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. u_1 est égal à la somme de u_0 et le montant des intérêts acquis pendant la première année, donc :

$$u_1=u_0+\frac{3}{100}\times u_0=5000+0{,}03\times 5000=5000+150=5150$$

de même : $u_2=u_1+\frac{3}{100}\times u_1=5150+0{,}03\times 5150=5150+154{,}5=5304{,}5$

2.a. u_{n+1} est égal à la somme de u_n et le montant des intérêts acquis pendant la $(n+1)^{\text{ième}}$ année, donc :

$$u_{n+1}=u_n+\frac{3}{100}\times u_n=u_n+0{,}03\times u_n=(1+0{,}03)\times u_n=1{,}03\times u_n$$

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=5000$ et de raison $q=1{,}03$.

2.b. Pour tout entier naturel n,

$$u_n=u_0\times q^n=5000\times 1{,}03^n$$

3. Le capital acquis par Lisa à ses 18 ans est :

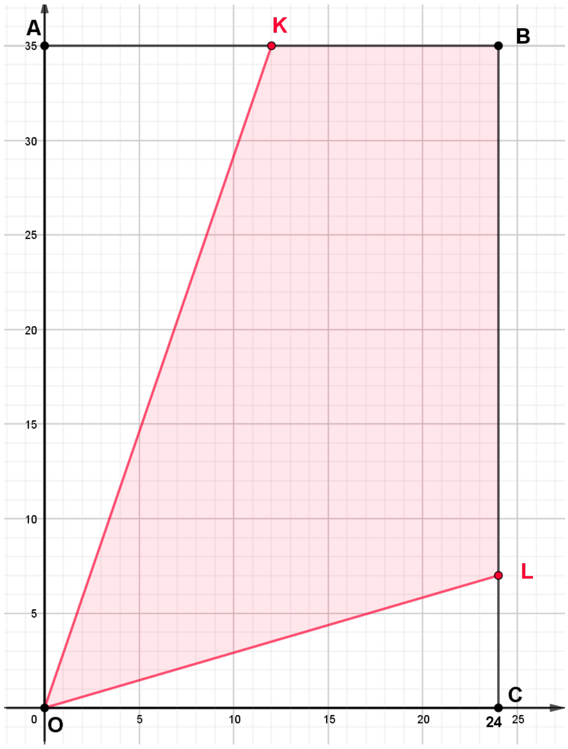
$u_{18}=5000\times 1{,}03^{18}=8512{,}17$ (arrondi au centième)

4. On remarque que la suite (u_n) est croissante.
On veut déterminerle plus petit entier naturel n tel que $u_n\geqslant 10000$.
En utilisant la calculatrice par balayage, on obtient :
$u_{23}=9867{,}93$
$u_{24}=10163{,}97$
Laura aura 24 ans lorsque le capital sera, pour la première fois, supérieur à 10000.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

EXERCICE 3 (5 points)

Le rectangle OABC ci-dessous représente une place touristique vue de dessus.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OC}=24.\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}=35.\vec{j}$.
Afin d'éclairer le plus grand nombre de monuments, on place au point O un projecteur lumineux qui permet d'éclairer la partie du plan délimitée par les segments de droite [OK] et [OL] tells que K est le milieu de [AB] et $\overrightarrow{CL}=\frac{1}{5}.\overrightarrow{CB}$.



1. Déterminer par lecture graphique les coordonnées les points A ; B ; C ; K et L.

2. Un visiteur affirme : « Moins de 70 % de la surface de la place est éclairée ».
Cette affirmation est-elle exacte ?

3.a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{OL}$.

3.b. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OL}$ est égal à 533.

3.c. En déduire la mesure arrondie au degré, de l'angle $\widehat{KOL}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1. A(0;35) B(24;35) C(24;0) K(12;35) L(24;7).

2. L'aire du rectangle OABC est égale à : $\mathcal{A} = 24\times 38=840$ unités d'aire.

L'aire du triangle rectangle OCL est égale à : $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2}\times 24\times 7=12\times 7=84$ unités d'aire.

L'aire du triangle rectangle OAK est égale à : $\mathcal{A}_2 = \dfrac{1}{2}\times 35\times 12=35\times 6=210$ unités d'aire.

L'aire du quadrillage OKBL (aire de la surface éclairée) est égale à :
$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A} - \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = 840-84-210=546$ unités d'aire.

Le pourcentage de la surface éclairée est : $\dfrac{546}{840}\times 100=65\,\%$.

L'affirmation du visiteur est exacte.

3.a. $\overrightarrow{OK}\begin{pmatrix}12\\35\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{OL}\begin{pmatrix}24\\7\end{pmatrix}$

3.b. $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OL}=12\times 24+35\times 7=288+245=533$.

3.c. $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OL}=OK\times OL\times\cos\left(\widehat{KOL}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \cos\left(\widehat{KOL}\right)=\dfrac{\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OL}}{OK\times OL}$

$OK^2=12^2+35^2=144+1225=1369=37^2 \qquad OK=37$

$OL^2=24^2+7^2=576+49=625=25^2 \qquad OL=25$

$\cos\left(\widehat{KOL}\right)=\dfrac{533}{25\times 37}=\dfrac{533}{925}$

En utilisant la calculatrice on obtient :

$\widehat{KOL}$ **=55°** arrondi au degré.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^3-x^2-x-1$.

1. On note f' la fonction dérivée de f.

1.a. Montrer que, pour réel de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f'(x)=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1)$.

1.b. En déduire le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$.

1.c. Déterminer l'abscisse du point de la courbe représentative de f pour lequel le coefficient directeur de la tangente vaut 7.

2. On note x_0 l'unique solution de l'équation $f(x)=0$.
On admet que $x_0\in[1;2]$
On considère la fonction suivante définie en langage Python.

```
def zero_de_f(n):
  a=1
  b=2
  for k in range(n):
    x=(a+b)/2
    if x**3-x**2-x-1<0:
      a=x
    else:
      b=x
  return a,b
```

2.a. On applique cette fonction pour $n=3$.
Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

itération	$x=\frac{a+b}{2}$	f(x)<0?	a	b	amplitude de [a;b]
k=1	1.5	oui	1.5	2	0.5
k=2					
k=3					

2.b. En déduire un encadrement de x_0 , d'amplitude $0{,}125$, par deux nombres décimaux.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

CORRECTION

1.a. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x)=x^3-x^2-x-1$.

$f'(x)=3x^2-2x-1 = ax^2+bx+c$

$\Delta=(-2)^2-4\times3\times(-1)=4+12=16=4^2$.

$x_1=\frac{2-4}{2\times3}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x_2=\frac{2+4}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$

donc $f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

1.b. Pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$, $3\left(x+\frac{1}{3}\right)>0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de (x-1).

Tableau de variation de f

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	-1	↘	-2	↗	

1.c. On résout : $f'(x)=7 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ 3x^2-2x-1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ 3x^2-2x-8=0 \end{cases}$

$3x^2-2x-8=0$ $\qquad$ $\Delta=(-2)^2-4\times3\times(-8)=4+96=100=10^2$

$x_1=\frac{2-10}{2\times3}=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}<0$ $\qquad$ $x_2=\frac{2+10}{2\times3}=\frac{12}{6}=2>0$

L'abscisse du point de la courbe représentative de f pour lequel le coefficient directeur de la tangente vaut 7 est égal à 2.

2.a. On complète le tableau en utilisant la calculatrice

itération	$x=\frac{a+b}{2}$	f(x)<0?	a	b	amplitude de [a;b]
k=1	1.5	oui	1.5	2	0.5
k=2	1.75	oui	1.75	2	0.25
k=3	1.875	non	1.75	1.875	0.125

2.b. On obtient :

$1{,}75 < x_0 < 1{,}875$ et $1{,}875-1{,}75=0{,}175$;

Remarque :

Si on exécute le programme Python en ajoutant la ligne 11 print(zero_de_f(3)).

On obtient : (1,75;1,875).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés