

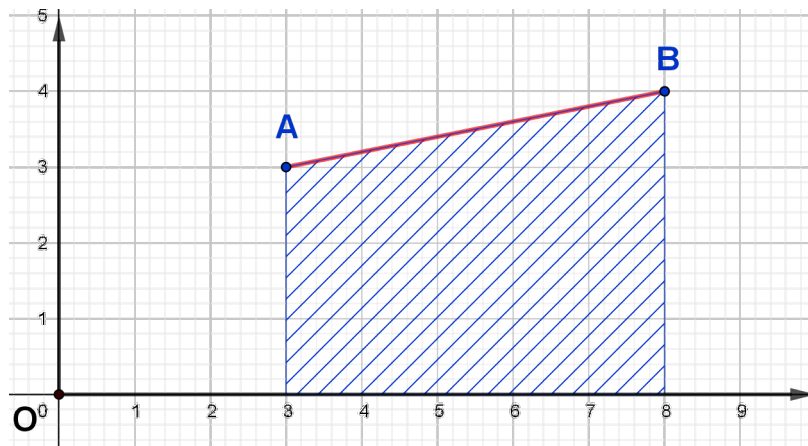
TP2

1. Préambule

On propose de déterminer une valeur approchée d'une aire en utilisant un algorithme.

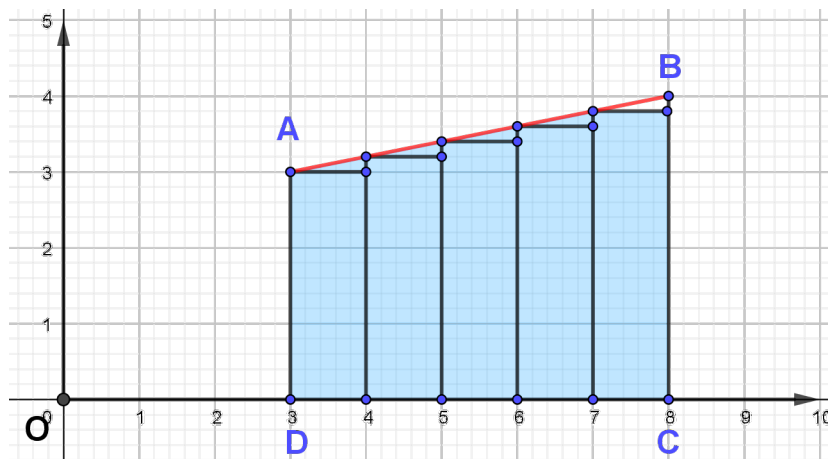
2. Énoncé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[3;8]$ par $f(x)=0,2x+2,4$ (f est une fonction affine).
On trace sa courbe, dans un repère orthonormé, qui est le segment $[AB]$.



On se propose de déterminer des valeurs approchées de l'aire de la partie de plan comprise entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[3;8]$ (partie hachurée sur la figure).

On partage l'intervalle $[3;8]$ en 5 intervalles de même largeur : $\frac{8-3}{5}=1$ et on considère cinq rectangles de base 1 et de hauteurs respectives : $f(3)$; $f(4)$; $f(5)$; $f(6)$ et $f(7)$.



La somme des aires de ces 5 rectangles (aire de la partie de plan colorée en bleu sur la figure précédente) est une valeur approchée de l'aire recherchée (mais on ne connaît pas la précision).

$$S = 1 \times f(3) + 1 \times f(4) + 1 \times f(5) + 1 \times f(6) + 1 \times f(7) = 0,6 + 2,4 + 0,8 + 2,4 + 1 + 2,4 + 1,2 + 2,4 + 1,4 + 2,4$$

$$S = 3 + 3,2 + 3,4 + 3,6 + 3,8 = 17.$$

2.1. Si on augmente le nombre d'intervalles on obtiendra une valeur plus précise de l'aire demandée.

On veut déterminer un algorithme permettant de calculer S en partageant l'intervalle $[3;8]$ en 20 intervalles de même largeur : $\frac{8-3}{20}=0,25$.

On remarquera que les hauteurs des rectangles considérés sont : $f(3)$; $f(3+1 \times 0,25)$; $f(3+2 \times 0,25)$... $f(3+k \times 0,25)$ + ... + $f(3+19 \times 0,25)$.

2.1.a. Écrire un algorithme répondant au problème.

2.1.b. En utilisant le logiciel Python, programmer cet algorithme et le faire fonctionner.

- 2.2. On remarque , que l'on est capable de calculer l'aire du quadrilatère ABCD.
Démontrer que cette aire est égale à 17,5.
- 2.3. On veut maintenant déterminer le nombre minimal n d'intervalles, de même largeur, nécessaires pour que $17,5 - S < 0,01$ (pour obtenir une précision à 0,01 près) soit $S > 17,49$.
- 2.3.a. Écrire un algorithme répondant au problème.
- 2.3.b. En utilisant le logiciel Python, programmer cet algorithme et le faire fonctionner.

3. Correction

3.1. Algorithme

Variables : A ; B et S sont des nombres réels
k est un entier naturel

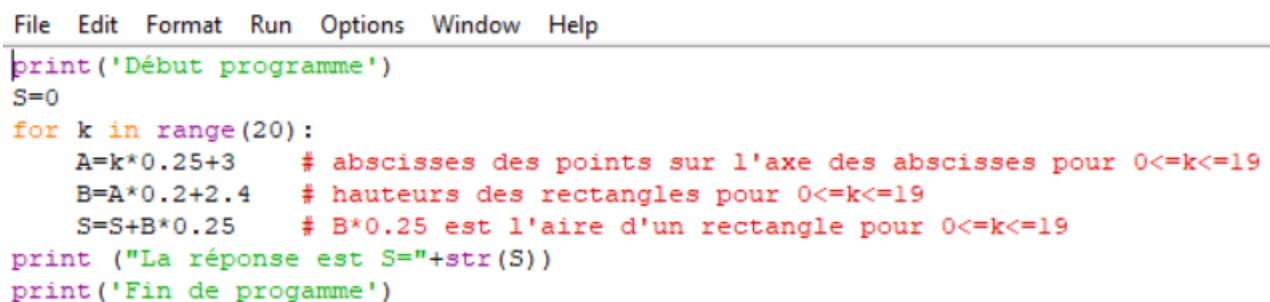
Traitement : Pour k entier compris entre 0 et 19
A=kx0,25+3
B=Ax0,2+2,4
S=S+Bx0,25

Sortie : Afficher S

. Programme en Python

```
print('Début de programme')
S=0
for k in range(20):
    A=k*0,25+3      # abscisses des points pour 0<=k<=19
    B=A*0,2+2,4     # hauteurs des rectangles pour 0<=k<=19
    S=S+B*0,25      # B*0,25 est l'aire d'un rectangle pour 0<=k<=19
print(« La réponse est S= »+str(S))
print('Fin de programme')
```

. On obtient



. Remarques

Pour le logiciel Python, on commence à 0 et non à 1 pour l'instruction range() donc pour range(20) on considère les entiers naturels de 0 à 19.

On détaille, dans cet exemple, le calcul des images par la fonction f .

. On lance le programme et on obtient

Début de programme

La réponse est S=17,375

Fin de programme

```
Python 3.6.4 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.6.4 (v3.6.4:d48eceb, Dec 19 2017, 06:54:40) [MSC v.1900 64 bit (AMD64)]
on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
===== RESTART: C:\Users\Serge\Documents\Programmes-Python\tp2-1.py =====
Début programme
La réponse est S=17.375
Fin de programme
>>> |
```

. Conclusion

Si on partage l'intervalle [3;8] en 20 intervalles de même largeur, S=17,375.

2.2. Le quadrilatère ABCD est un trapèze rectangle de petite base : 3, de grande base:4 et de hauteur : 5

donc d'aire : $\frac{(3+4) \times 5}{2} = 17,5$.

2.3. Pour n entier naturel non nul, la largeur d'un intervalle est $A = \frac{8-3}{n} = \frac{5}{n}$.

Les abscisses des points sont $B = A \times k + 3$.

Les hauteurs des rectangles sont $C = 0,2 \times B + 2,4$

. Algorithme

Variables : A ; B ; C et S sont des réels
n et k sont des entiers naturels

Initialisation : S=0
n=20

Traitement : Tant que $S \leq 17,49$
S=0
n=n+1
Pour tout entier compris entre 0 et n-1
 $A = \frac{5}{n}$
 $B = A \times k + 3$
 $C = B \times 0,2 + 2,4$
 $S = S + B \times A$

Sortie : Afficher n et S

. Programme Python

```
print('Début de programme')
S=0
n=20
while(S<=17,49):
    S=0
    n=n+1
    for k in range(n):
        A=5/n # largeur d'un intervalle-base d'un rectangle
        B=A*k+3 # abscisses des points pour 0<=k<=n-1
```

```
C=B*0.2+2.4      # hauteurs des rectangles pour 0<=k<=n-1
S=S+C*A          # C*A aire d'un rectangle pour 0<=k<=n-1
print(« n= »+str(n), « S= »+str(S))
print('Fin de programme')
```

. On obtient

```
File Edit Format Run Options Window Help
print('Début de programme')
n=20
S=0
while (S<=17.49):
    S=0
    n=n+1
    for k in range(n):
        A=5/n          # largeur d'un intervalle-base d'un rectangle
        B=A*k+3        # abscisses des points pour 0<=k<=n-1
        C=B*0.2+2.4    # hauteurs des rectangles pour 0<=k<=n-1
        S=S+C*A        # c*A aire des rectangles pour 0<=k<=n-1
    print("n="+str(n), "S="+str(S))
print('Fin de programme')
```

. Remarques

Il est nécessaire de donner à S une valeur inférieure à 17,49 pour lancer le programme, donc on a posé $S=0$ (on peut poser $S=16$).

Après l'instruction `while` il est nécessaire avant chaque début de boucle de donner à S la valeur 0.

On a donné à n pour valeur initiale 20, on peut donner la valeur 1 (pour $n=20$ on a $S < 17,49$).

Après la ligne : `for k in range(n)`, on a une nouvelle indentation de 4 espaces.

. On lance le programme et on obtient

Début de programme

$n=250$ $S=17,4900000000000002$

Fin de programme

```
Python 3.6.4 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.6.4 (v3.6.4:d48eceb, Dec 19 2017, 06:54:40) [MSC v.1900 64 bit (AMD64)]
on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
===== RESTART: C:\Users\Serge\Documents\Programmes-Python\tp2-2.py =====
Début de programme
n=250 S=17.4900000000000002
Fin de programme
>>> |
```

. Conclusion

Il est nécessaire d'avoir au moins 250 intervalles de même largeur pour obtenir une valeur approchée de l'aire à 0,01 près.