

TP4

1. Préambule

Le logiciel Python utilise une instruction simple qui permet de calculer le reste de la division euclidienne de deux entiers positifs.

Exemples :

Dans cet exercice on choisit 8 pour diviseur.

$45 = 8 \times 5 + 5$ le quotient est 5 et le reste est 5.

$72 = 8 \times 9 + 0$ le quotient est 9 et le reste est 0.

$4 = 8 \times 0 + 4$ le quotient est 0 et le reste est 4.

Si a est un entier naturel alors $a = b \times q + r$ q est un entier naturel et r est un entier naturel compris entre 0 et 7.
 $r = 0$ ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 ou 7.

Si a est un entier naturel, $a \% 8$ représente le reste de la division euclidienne de a par 8.

Attention, $a \% 8$ n'est pas une variable pour le logiciel Python mais un entier naturel compris entre 0 et 7.

Un entier naturel a est divisible par 8 si et seulement si $a \% 8$ est nul.

2. Énoncé

n est un entier naturel.

$$a = 3^n + 5^n$$

On rappelle que $3^0 = 5^0 = 1$

2.1. Pour $n \leq 20$, on veut déterminer les valeurs de n pour lesquelles a est divisible par 8.

- En donnant un programme Python et en l'exécutant, répondre à la question.
- Quelle conjecture peut-on faire ?

2.2. Pour $n \leq 20$, on se propose de déterminer les valeurs pour lesquelles a est divisible par 4.

2.2.a. Démontrer que pour tout entier naturel n , a est un nombre pair.

En déduire les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de a par 8.

2.2.b. Déterminer un algorithme puis donner un programme en Python permettant de répondre à la question et exécuter ce programme.

- Quelle conjecture peut-on faire.

3. Correction

3.1.

```
print('Début de programme')
```

```
for n in range(21):
```

```
    a=3**n+5**n
```

```
    r=a%8    # r prend la valeur du reste de la division euclidienne de a par 8
```

```
    if r==0:  # si la valeur affectée à r est égale à 0
```

```
        print(« n= »+str(n),« a est divisible par 8 »)
```

```
print('Fin de programme')
```

- On obtient

File Edit Format Run Options Window Help

```
print('Début de programme')

for n in range(21):
    a=3**n+5**n
    r=a%8    # r prend la valeur du reste de la division euclidienne de a par 8
    if r==0: # Si la valeur affectée à r est égale à 0
        print("n="+str(n), "a est divisible par 8")
print('Fin de programme')
```

. Remarques

On utilise range(21) car on veut les résultats pour les 21 valeurs de n comprise entre 0 et 20.

À la quatrième ligne, on affecte à la variable r la valeur a%8.

À la cinquième ligne on ne peut pas écrire r=0 sinon on affecte à r la valeur 0.

On veut connaître si la valeur affectée à la variable r est égale à 0.

Pour cela cette instruction le logiciel Python utilise un double symbole égal.

. On exécute le programme et on obtient

Début de programme

n=1 a est divisible par 8
 n=3 a est divisible par 8
 n=5 a est divisible par 8
 n=7 a est divisible par 8
 n=9 a est divisible par 8
 n=11 a est divisible par 8
 n=13 a est divisible par 8
 n=15 a est divisible par 8
 n=17 a est divisible par 8
 n=19 a est divisible par 8
 Fin de programme

 Python 3.6.4 Shell

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
Python 3.6.4 (v3.6.4:d48ecec, Dec 19 2017, 06:54:40) [MSC v.1900 64 bit (AMD64)]
on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
===== RESTART: C:\Users\Serge\Documents\Programmes-Python\tp4-1.py =====
Début de programme
n=1 a est divisible par 8
n=3 a est divisible par 8
n=5 a est divisible par 8
n=7 a est divisible par 8
n=9 a est divisible par 8
n=11 a est divisible par 8
n=13 a est divisible par 8
n=15 a est divisible par 8
n=17 a est divisible par 8
n=19 a est divisible par 8
Fin de programme
>>> |
```

- . On remarque que pour toute valeur impaire de n, a est divisible par 8 et que pour toute valeur paire de n, a n'est pas divisible par 8.

Conjecture

n est un entier naturel, $a = 3^n + 5^n$ est divisible par 8 si et seulement si n est impair.

Ce résultat sera démontré en première.

3.2.a. Le produit de deux nombres impairs est un nombre impair donc toute puissance d'un nombre impair est un nombre impair.

Pour tout entier naturel n , 3^n et 5^n sont des nombres impairs et leur somme est a un nombre pair.

Conséquence

r est un nombre pair et r est compris entre 0 et 7.

Les valeurs possibles de r sont : 0 ; 2 ; 4 et 6.

3.2.b. a est divisible par 4 si et seulement si $r=0$ ou $r=4$.

(car a est divisible par 4 si et seulement si $a-8q$ est divisible par 4).

Pour avoir un reste égal à 0 ou 4 il suffit de ne pas avoir un reste égal à 2 ou 6.

On propose l'algorithme suivant.

Variables : a , n et r sont des entiers naturels

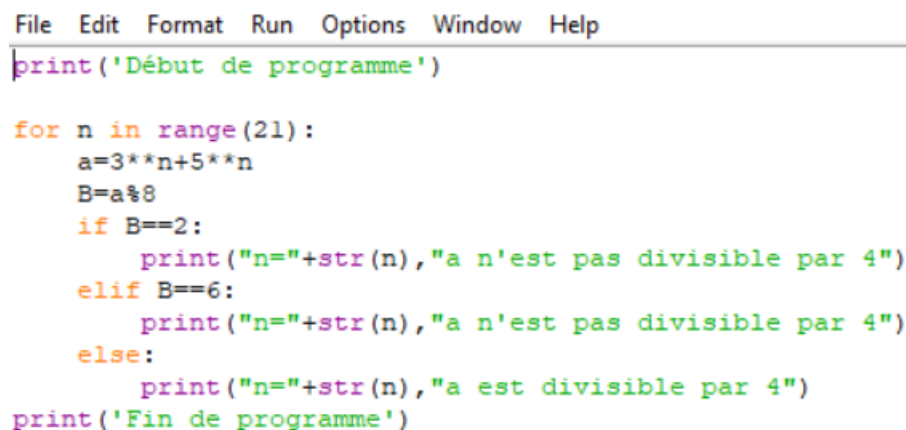
Traitement

et Sortie : Tant que $0 \leq n \leq 20$
 $a = 3^n + 5^n$
 r est le reste de la division euclidienne de a par 8
 Si $r=2$
 Afficher : a n'est pas divisible par 4
 Sinon Si $r=6$
 Afficher : a n'est pas divisible par 4
 Sinon
 Afficher : a est divisible par 4

. Programme en Python

```
print('début de programme')
for n in range(21):
    a=3**n+5**n
    r=a%8
    if r==2:
        print("n=",str(n),"a n'est pas divisible par 4")
    elif r==6:
        print("n=",str(n),"a n'est pas divisible par 4")
    else:
        print("n=",str(n),"a est divisible par 4")
print('Fin de programme')
```

. On obtient



```
File Edit Format Run Options Window Help
print('Début de programme')

for n in range(21):
    a=3**n+5**n
    B=a%8
    if B==2:
        print("n="+str(n),"a n'est pas divisible par 4")
    elif B==6:
        print("n="+str(n),"a n'est pas divisible par 4")
    else:
        print("n="+str(n),"a est divisible par 4")
print('Fin de programme')
```

- . Remarque
elif est l'instruction Sinon Si
- . On exécute le programme et on obtient

Début de programme

n=0	a n'est pas divisible par 4
n=1	a est divisible par 4
n=2	a n'est pas divisible par 4
n=3	a est divisible par 4
n=4	a n'est pas divisible par 4
n=5	a est divisible par 4
n=6	a n'est pas divisible par 4
n=7	a est divisible par 4
n=8	a n'est pas divisible par 4
n=9	a est divisible par 4
n=10	a n'est pas divisible par 4
n=11	a est divisible par 4
n=12	a n'est pas divisible par 4
n=13	a est divisible par 4
n=14	a n'est pas divisible par 4
n=15	a est divisible par 4
n=16	a n'est pas divisible par 4
n=17	a est divisible par 4
n=18	a n'est pas divisible par 4
n=19	a est divisible par 4
n=20	a n'est pas divisible par 4

Fin de programme

```
Python 3.6.4 Shell
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.6.4 (v3.6.4:d48eceb, Dec 19 2017, 06:54:40) [MSC v.1900 64 bit (AMD64)]
on win32
Type "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>>
===== RESTART: C:\Users\Serge\Documents\Programmes-Python\tp4-2.py =====
Début de programme
n=0 a n'est pas divisible par 4
n=1 a est divisible par 4
n=2 a n'est pas divisible par 4
n=3 a est divisible par 4
n=4 a n'est pas divisible par 4
n=5 a est divisible par 4
n=6 a n'est pas divisible par 4
n=7 a est divisible par 4
n=8 a n'est pas divisible par 4
n=9 a est divisible par 4
n=10 a n'est pas divisible par 4
n=11 a est divisible par 4
n=12 a n'est pas divisible par 4
n=13 a est divisible par 4
n=14 a n'est pas divisible par 4
n=15 a est divisible par 4
n=16 a n'est pas divisible par 4
n=17 a est divisible par 4
n=18 a n'est pas divisible par 4
n=19 a est divisible par 4
n=20 a n'est pas divisible par 4
Fin de programme
>>> |
```

. Conjecture

**a est divisible par 4 si et seulement si n est nombre impair (si et seulement si n est divisible par 8).
On peut vérifier que pour tout entier n pair (inférieur ou égal à 20) $r=2$.**