# TP6

## 1. Préambule

Nous nous proposons de préciser l'utilisation d'un tableur et de logiciels (en particulier le logiciel Python) pour effectuer une division euclidienne dans l'ensemble des entiers naturels puis pour déterminer le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels non nuls.

## 2. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

### 2.1. Rappel

On effectue la division de 133 par 9.

$$\begin{array}{r|l} 133 & 9 \\ \hline 43 & 14 \\ 7 & \end{array}$$

133 est le dividende de la division.
9 est le diviseur de la division.
14 est le quotient de la division.
7 est le reste de la division.
On a : $133=9\times 14+7$ .

### 2.2. Théorème

Pour tout entier naturel a et tout entier naturel b, il existe un unique couple d'entiers naturels (q;r) tel que :
$a=b\times q+r$ avec $0 \leqslant r < b$ .

### 2.3. Définitions

q se nomme **quotient** de la division euclidienne de a par b
r se nomme **reste** de la division euclidienne de a par b

### 2.4. Utilisation d'un tableur

En A1 : a — En B1 : b — En C1 : quotient — En D1 : reste
En A2 : 133 — En B2 : 9 — En C2 : =quotient(A2;B2) — En D2 : =mod(A2;B2)
En A3 : 152 — En B3 : 24
Pour C3 : on étire C2 vers le bas et on obtient 6.
Pour D3 : on étire D2 vers le bas et on obtient 8.

G6

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | quotient | reste | |
| 2 | 133 | 9 | 14 | 7 | |
| 3 | 152 | 24 | 6 | 8 | |
| 4 | | | | | |

Remarques :
Pour les instructions quotient(A2;B2) et mod(A2;B2), on utilise des parenthèses et un point virgule.

### 2.5. Utilisation du logiciel Géogébra

Pour obtenir le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b on tape dans la bande de saisie les instructions quotient[a,b] et reste[a,b].
Pour quotient[133,9] on obtient 14 et pour reste[133,9] on obtient 7.
On remarquera l'utilisation de crochets et une virgule.

### 2.6. Utilisation du logiciel Xcas

Dans l'application arithmétique du logiciel, pour obtenir le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b, on utilise les instructions : iquo(a,b) pour le quotient et irem(a,b) pour le reste.
Pour iquo(133,9) on obtient 14 et pour irem(133,9) on obtient 7.
On remarquera l'utilisation de parenthèses et d'une virgule.

### 2.7. Utilisation du logiciel Python

Pour obtenir le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b, on utilise les instructions suivantes a//b pour le quotient et a%b pour le reste.
On propose un programme , demandant à l'utilisateur d'entrer successivement les valeurs de a et b ( a est entier naturel et b est un entier naturel non nul) et l'exécution du programme donnera le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

```
print('Début de programme')
print("veuillez entrer un entier relatif a: ",end=" ")
m=input()
a=int(m)
print("a="+str(a))
print("veuillez un entier naturel non nul b:",end=" ")
n=input()
b=int(n)
print("b="+str(b))
q=a//b
print("Le quotient de la division euclidienne de a par b est égal à q="+str(q))
r=a%b
print("Le reste de la division euclidienne de a par b est r="+str(r))
print('Fin de programme')
```

On exécute le programme en entrant a=133 et b=9 et on obtient :

```
Début de programme
veuillez entrer un entier relatif a:  133
a=133
veuillez un entier naturel non nul b: 9
b=9
Le quotient de la division euclidienne de a par b est égal à q=14
Le reste de la division euclidienne de a par b est r=7
Fin de programme
>>> |
```

*Remarque*
*L'instruction input() arrête l'exécution du programme et saisit la donnée entrée par l'utilisateur( cette donnée peut-être une chaîne de caractères). Dans le programme la donnée est m, l'instruction a=int(m) précise au logiciel que la donnée est un entier.*

## 3. Diviseurs et multiples d'un entier naturel

### 3.1. Définition

a et b sont des entiers naturels.
On dit que b est un diviseur de a si et seulement s'il existe un entier naturel q tel que a=bq.

### 3.2. Remarques

- Tout entier naturel b divise 0 car $0=b\times 0$ .
  L'ensemble des diviseurs de 0 est $D_0=\mathbb{N}$.
- Le seul diviseur de 1 est 1.
  L'ensemble des diviseurs de 1 est $D_1=\{1\}$ .
- Tout entier naturel a supérieur ou égal à 2 admet au moins 2 diviseurs 1 et a car $a=1\times a=a\times 1$ .
  Dans ce cas l'ensemble des diviseurs de a $D_a$ contient au moins deux éléments.
- Si un entier naturel a admet exactement deux diviseurs, on dit que ce nombre est **premier**.
  Exemple : 11 car $D_{11}=\{1;11\}$ .

### 3.3. Ensemble des diviseurs d'un entier naturel non nul

- Exemples :
  $D_6=\{1;2;3;6\}$ $D_8=\{1;2;4;8\}$ $D_{49}=\{1;7;49\}$
- Remarques :
  Il est difficile de déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel dans le cas général.

Lorsque l'on connaît la décomposition en facteurs premiers de l'entier naturel supérieur ou égal à 2 , on peut obtenir l'ensemble des diviseurs de ce nombre.
Les logiciels Géogébra ou Xcas donnent cette décomposition pour les nombres qui ne sont pas trop *grands*
Ici on ne considère pas cette étude.
Le *nombre* de diviseurs d'un entier peut-être très important, il est obtenu par exemple avec le logiciel Géogébra par l'instruction diviseurs :[a].
On propose un programme ***simpliste*** avec le logiciel Python pour des nombres non trop grands et n'ayant pas de trop de diviseurs.

. Programme en Python

```
print('Début de programme')
print("Veuillez entrer un entier naturel non nul a")
m=input()
a=int(m)
print("les diviseurs de l'entier"" "+str(a)+" ""sont:")
for i in range(a+1):
    for j in range(a+1):
        if(i*j==a):
            print(i,end=" ")
        else:
            j=j+1
    i=i+1
print('Fin de programme')
```

. Exécution du programme pour les valeurs : 133 ; 97 ; 12714

```
Début de programme
Veuillez entrer un entier naturel non nul a
133
les diviseurs de l'entier 133 sont:
1 7 19 133 Fin de programme
```

$D_{133}=\{1;7;19;133\}$

```
Début de programme
Veuillez entrer un entier naturel non nul a
97
les diviseurs de l'entier 97 sont:
1 97 Fin de programme
>>>
```

$D_{97}=\{1;97\}$ 97 est un nombre premier

```
Début de programme
Veuillez entrer un entier naturel non nul a
12714
les diviseurs de l'entier 12714 sont:
1 2 3 6 13 26 39 78 163 326 489 978 2119 4238 6357 12714 Fin de programme
>>>
```

$D_{12714}=\{1;2;3;6;13;26;39;78;163;326;489;978;2119;4238;6357;12714\}$
Le temps pour obtenir le résultat est assez important ce qui confirme que le programme n'est pas très performant.

**3.4. <u>Définition</u>**

a et b sont des entiers naturels.
On dit que a est un multiple de b si et seulement s'il existe un entier naturel q tel que $a=bq$.

**3.5. <u>Remarques</u>**

. Le seul multiple de 0 est 0.
L'ensemble des multiples de 0 est le singleton $\{0\}$ : $M_0=0$ .

. Si b est est un entier naturel non nul alors l'ensemble des multiples de b est infini.

- Pour $b=1$ l'ensemble des multiples de 1 est : $D_1 = \mathbb{N}$.

## 4. PGCD et PPCM de deux entiers naturels non nuls

### 4.1. Définition

- Tous les entiers naturels non nuls ont au moins un diviseur commun : 1.
- Deux entiers naturels a et b non nuls peuvent avoir dautres diviseurs communs.
  Exemple 2 est un diviseur commun de 6 et 8.
- a et b étant deux entiers naturels non nuls, on nomme PGCD(a;b) le plus grand diviseur commun de a et b.

### 4.2. Remarques

- On ne peut pas facilement écrire l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel non nul donc on ne peut pas en général déterminer PGCD(a;b) par simple lecture des ensembles des diviseurs de a et b.
- a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a \geqslant b$.
  On effectue la division euclidienne de a par b : $a=bq+r \quad 0 \leqslant r < b$.
  Tout diviseur commun n à a et b est un diviseur de r.
  $a=kn$ et $b=hn$ (k et h sont des entiers naturels).
  On obtient $kn-hnq=r \Leftrightarrow (k-hq)n=r$ ($k-hq$ est un entier naturel).
  Tout diviseur commun m de b et r est un diviseur de a.
  $b=pm$ et $r=lm$ (p et l sont des entiers naturels).
  On obtient $a=pmq+lm=m(pq+l)$ ($pq+l$ est un entier naturel).
  Conséquence
  L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs à b et r.
  ( b est inférieur ou égal à a et r est strictement inférieur à b ).

### 4.3. Algorithme d'Euclide

a et b sont des entiers naturels non nuls tels que : $a \geqslant b$.

- On effectue la division euclidienne de a par b, on note $q_1$ le quotient et $r_1$ le reste.
  $a=bq_1+r_1 \quad 0 \leqslant r_1 < b$
  - Si $r_1=0$ alors b est un diviseur de a et PGCD(a;b) = b.
  - Si $r_1 \neq 0$ alors on effectue la division euclidienne de b par $r_1$, on note $q_2$ le quotient et $r_2$ le reste.
    $b=r_1 q_2+r_2 \quad 0 \leqslant r_2 < r_1$
  - Si $r_2=0$ alors $r_1$ est un diviseur de b et $r_1$ est le plus grand diviseur de a et b et $\text{PGCD}(a;b)=r_1$
  - Si $r_2 \neq 0$ alous on effectue la division euclidienne de $r_1$ par $r_2$ on note $q_3$ le quotient et $r_3$ le reste.
    $r_1=r_2 q_3+r_3 \quad 0 \leqslant r_3 < r_2$
    Et on réitère le raisonnement . . .
  - La suite $(r_i)$ est une suite d'entiers naturels stictement décroissante donc il existera une division euclidienne pour laquelle le reste est nul.

  **Pgcd(a;b) sera le dernier reste non nul.**

- Exemple
  $a=963 \quad b=153$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $953=153\times6+45$ | $0 \leqslant 45 < 153$ | $q_1=6$ | $r_1=153$ |
| $153=45\times3+18$ | $0 \leqslant 18 < 45$ | $q_2=3$ | $r_2=18$ |
| $45=18\times2+9$ | $0 \leqslant 9 < 18$ | $q_3=2$ | $r_3=9$ |
| $18=9\times2+0$ | $0 \leqslant 0 < 9$ | $q_4=2$ | $r_4=0$ |

PGCD(963;153) = 9
Disposition pratique

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 3 | 2 | 2 |
| 963 | 153 | 45 | 18 | 9 |
| 45 | 18 | 9 | 0 | |

### 4.4. Utilisation d'un tableur

A1 : 963 B1 : 153 C1 : =quotient(A1;B1) D1 : =mod(A1;B1)

A2 : =B1 B2 : =D1

Puis, on étire.

On obtient :

J6

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 963 | 153 | 6 | 45 |
| 2 | 153 | 45 | 3 | 18 |
| 3 | 45 | 18 | 2 | 9 |
| 4 | 18 | 9 | 2 | 0 |
| 5 | | | | |

### 4.5. Utilisation d'un logiciel

- Géogébra :
  Dans la bande de saisie, on utilise l'instruction : pgcd[a,b].
- Xcas :
  Dans l'application arithmétique, on utilise l'instruction : gcd(a,b).
- Programme en Python

```python
print('Début de programme')
print("veuillez entrer un entier naturel non nul a:",end=" ")
m=input()
a=int(m)
print("a="+str(a))
print("veuillez entrer un entier naturel non nul b:",end=" ")
n=input()
b=int(n)
print("b="+str(b))
if a<b:
    c=b
    d=a
else:
    c=a
    d=b
r=d
while(0<r):
    r=c%d
    c=d
    d=r
print("Le PGCD de a et b est:"+str(c))
print("Fin de programme")
```

Exécution du programme

On entre a=963 et b=153

```
Début de programme
veuillez entrer un entier naturel non nul a: 963
a=963
veuillez entrer un entier naturel non nul b: 153
b=153
Le PGCD de a et b est:9
Fin de programme
>>> |
```

## 4.6. PPCM de deux entiers naturels non nuls

- a et b sont deux entiers naturels.
  Le produit ab est un multiple commun de a et b.
  Le plus petit commun multiple de a et b se note PPCM(a;b).
- On admet que le plus petit commun multiple de a et b est égal au quotient du produit ab par PGCD(a;b).
  Conséquence
  Si a' est le quotient de a par PGCD(a;b) et b' le quotient de b PGCD(a;b) alors PPCM(a;b)=a'b=ab'.
- Géogébra :
  Dans la bande de saisie, on utilise l'instruction : ppcm[a,b].
- Xcas
  Dans l'application arithmétique, on utilise l'instruction : lcm(a;b).
- Programme Python

```
print('Début de programme')
print("veuillez entrer un entier naturel non nul a:",end=" ")
m=input()
a=int(m)
print("a="+str(a))
print("veuillez entrer un entier naturel non nul b:",end=" ")
n=input()
b=int(n)
print("b="+str(b))
if a<b:
    c=b
    d=a
else:
    c=a
    d=b
r=d
while(0<r):
    r=c%d
    c=d
    d=r
print("Le PGCD de a et b est:"+str(c))
k=a//c
p=k*b
print("Le PPcm de a et b est:"+str(p))
print("Fin de programme")
```

Exécution du programme

```
Début de programme
veuillez entrer un entier naturel non nul a: 963
a=963
veuillez entrer un entier naturel non nul b: 153
b=153
Le PGCD de a et b est:9
Le PPcm de a et b est:16371
Fin de programme
```

PPCM(963;153)= 16371