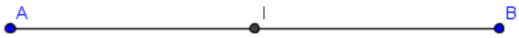
Compléments sur les vecteurs

1. Caractérisations vectorielles du milieu d'un segment

A et B sont 2 points du plan



✔ ***I est le milieu de [AB] si et seulement si :***
$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ (1)

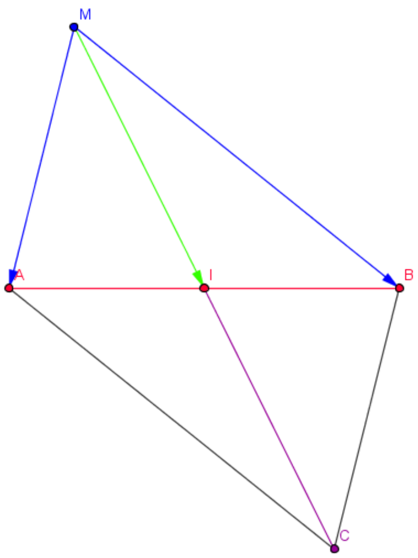
✔ ***I est le milieu de [AB] si et seulement si :***
$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (2)

✔ ***I est le milieu de [AB] si et seulement si :***
$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (3)

✔ ***I est le milieu de [AB] si et seulement si pour tout point M du plan on a :***
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ (4)

Preuve :

- Si pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ alors en choisissant M = I, on obtient $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et donc I est le milieu de [AB]
- Si I est le milieu de [AB], soit M un point quelconque du plan.



En utilisant la relation de Chasles.

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}$$

$$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$$

Or I est le milieu de [AB] et $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Donc

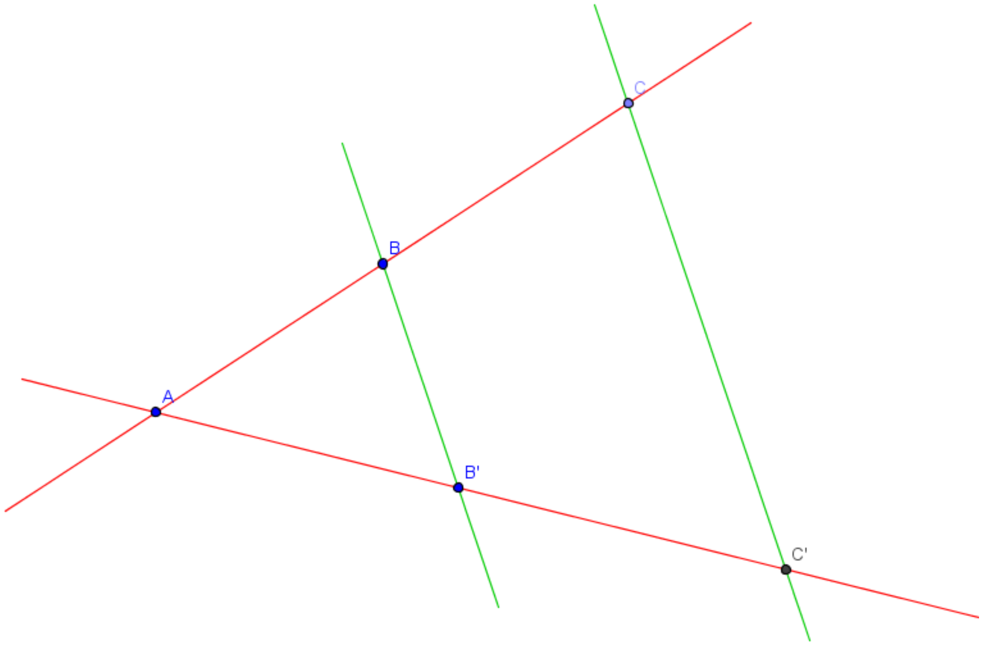
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$$

Remarque :

Soit C le symétrique du point M par rapport à I. (I est le milieu de [MC]) alors $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$ **Donc le quadrilatère MACB est un parallélogramme.**

2. Écriture vectorielle du théorème de Thalès

2.1. Première configuration de Thalès



$(BC)\, et\, (B'C')$ sont sécantes en A et $(BB')//(CC')$ alors

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{CC'}{BB'}$$

Donc cette configuration on a :

$\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$ avec $k=\frac{AC}{AB}$

$\overrightarrow{AC'}=k'\,\overrightarrow{AB'}$ avec $k'=\frac{AC'}{AB'}$

Donc $k=k'$

et $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}$ $= k\,\overrightarrow{BA}+k\,\overrightarrow{AB'}$

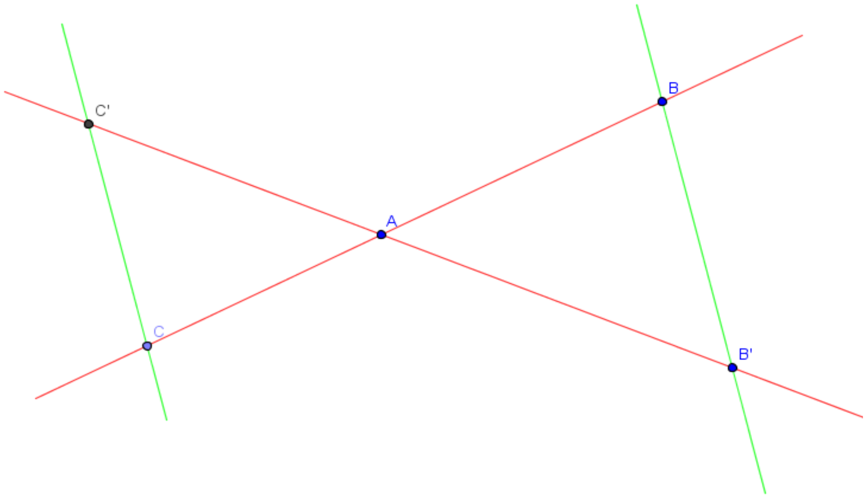
$= k(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'})$

$= k(\overrightarrow{BB'})$

Conclusion :

$$\boxed{\begin{aligned}&\overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}\\&\overrightarrow{AC'}=k.\overrightarrow{AB'}\\&\overrightarrow{CC'}=k.\overrightarrow{BB'}\end{aligned}}$$

2.2. Deuxième configuration de Thalès



Les droites (BC) et $(B'C')$ sont sécantes en A et $(BB')//(CC')$ alors $\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{CC'}{BB'}$

Dans cette configuration on a :

$C\in(AB)$ et $C\notin[AB)$ et $C'\notin[AB')$

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ avec $k=-\frac{AC}{AB}$

$\overrightarrow{AC'}=k'\overrightarrow{AB'}$ avec $k'=-\frac{AC'}{AB'}$

Donc $k=k'$

On vérifie de même que $\overrightarrow{CC'}=k\overrightarrow{BB'}$

Conclusion :

$\overrightarrow{AC}=k.\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AC'}=k.\overrightarrow{AB'}$
$\overrightarrow{CC'}=k.\overrightarrow{BB'}$

2.3. Théorème

Si les droites (BC) et $(B'C')$ sont sécantes en A et si $(BB')//(CC')$ et si k est le nombre réel tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ alors

$\overrightarrow{AC'}=k\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{CC'}=k\overrightarrow{BB'}$

2.4. Cas particulier

ABC est un triangle non aplati.

Si I est le milieu de [AB] et J milieu de [AC] alors

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$