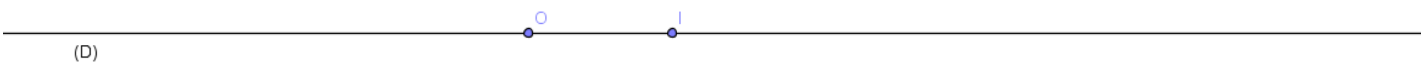
Coordonnées d'un point du plan

1. Coordonnées d'un point d'une droite

1.1. Repère d'une droite

- ✔ ***(D) est une droite du plan.***
- ✔ ***On nomme repère de (D) tout couple de points distincts de (D) : (O;I)***
  O est l'origine du repère
- ✔ ***La longueur OI est l'unité de longueur choisie sur (D)***

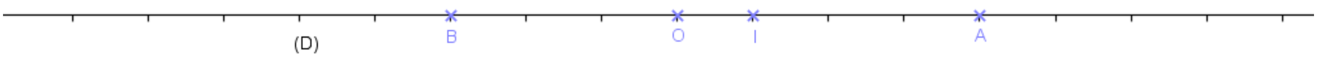


1.2. Coordonnée d'un point de (D)

M est un point de (D)

- ✔ ***L'abscisse du point M est le nombre réel*** **x_M = OM si M ∈ [O ; I) ou x_M = -OM si M ∉ [O ; I)**

Exemples



OA = 4 et $x_A = 4$

OB = 3 et $x_B = -3$

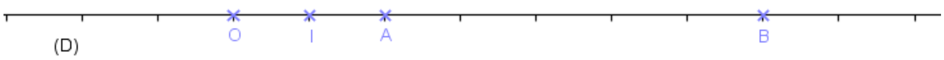
1.3.Remarque : longueur d'un segment

A ∈ (D) et B ∈ (D)

- ✔ **Si $x_A \leq x_B$ alors AB = $x_B - x_A$**
- ✔ **Si $x_B > x_A$ alors AB = $x_A - x_B$**

1er cas

$0 \leq x_A \leq x_B$

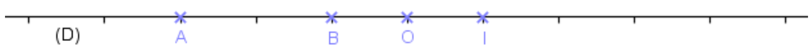


x_A = OA et x_B = OB

$$AB = OB - OA = x_B - x_A$$

2ème cas

$x_A \leq x_B \leq 0$

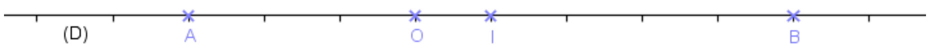


x_A = - OA et x_B = - OB

$AB = OA - OB = -x_A + x_B = x_B - x_A$

3ème cas

$x_A < 0 < x_B$



x_A = - OA et x_B = OB

$AB = OA + OB = -x_A + x_B = x_B - x_A$

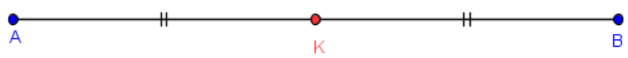
Remarque :

Si $x_A > x_B$ alors $BA = x_A - x_B$ or BA = AB

1.4. Milieu d'un segment

A et B sont deux points du plan.

Le milieu du segment [A B] est l'unique point K appartenant à [A B] tel que AK = KB



Remarque :

Si A = B alors K = A = B

1.5.Coordonnée du milieu d'un segment

A et B sont deux points de (D).

- ✔ **Si K est le milieu de [A B] alors** $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$
- ✔ **Si** $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ **alors K est le milieu de [A B]**

✔ On suppose $x_A \leq x_B$ et K milieu de [A B]

alors $x_A \leq x_K \leq x_B$ et $AK = x_K - x_A$ et $KB = x_B - x_K$

donc $AK = KB = x_K - x_A = x_B - x_K$

soit $2x_K = x_A + x_B$ et $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$

✔ On suppose $x_A \leq x_B$ et $x_K = \frac{x_A + x_B}{2}$

Donc $K \in [AB]$ et $2x_K = x_A + x_B$

$x_K - x_A = b_B - x_K$ soit $AK = KB$

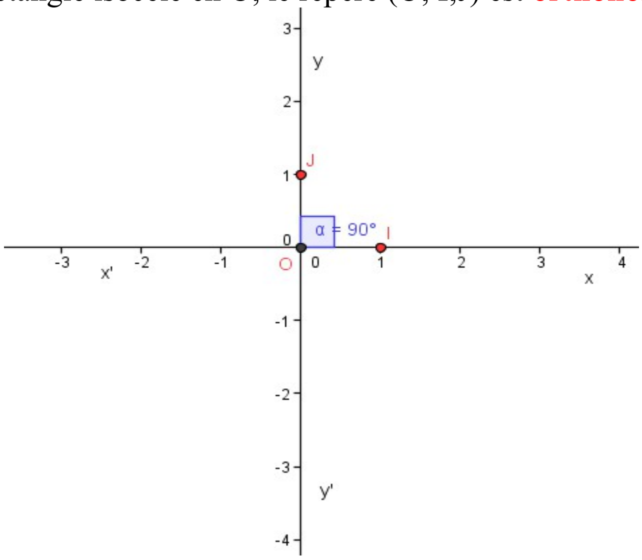
et K est le milieu de [A B]

2. Repères et coordonnées d'un point du plan

2.1.Repères du plan

OIJ est un triangle non aplati du plan.

✔ Si le triangle OIJ est rectangle isocèle en O, le repère (O; I;J) est **orthonormé**

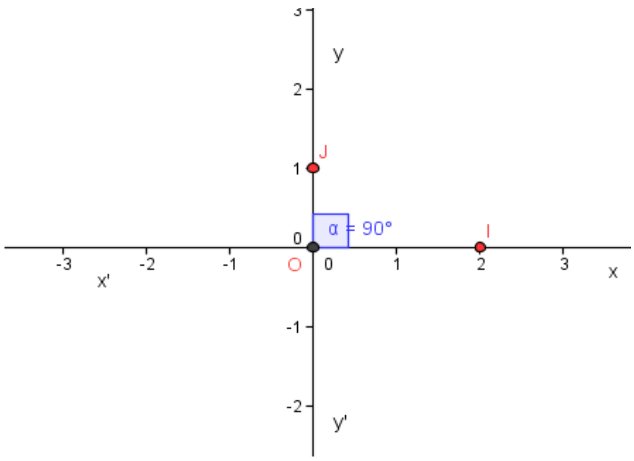


(O ; I) est un repère de (x' x)

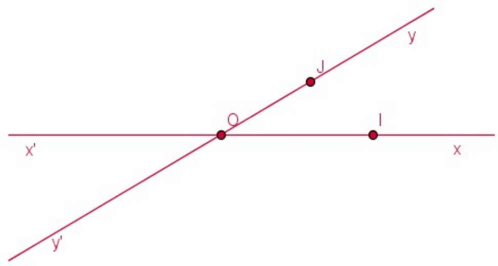
(O ; J) est un repère de (y' y)

On a la même unité de longueur sur (x' x) et (y' y) car OI = OJ

✔ Si le triangle OIJ est rectangle mais non isocèle en O, le repère (O; I;J) est **orthogonal**



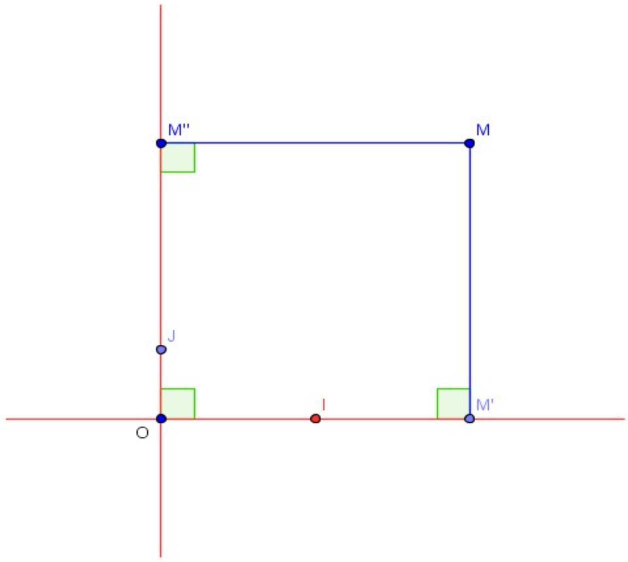
On n' a pas la même unité de longueur sur (x' x) et (y' y) car OI ≠ OJ



✔ Si le triangle OIJ n' est pas rectangle, le repère (O; I;J) est **cartésien**

2.2. Coordonnées d'un point

OIJ est un rectangle en O



OM'MM'' est un rectangle

$x_{M'}$ est l'abscisse de M' dans le repère (O;I)

$x_{M''}$ est l'abscisse de M' dans le repère (O;J)

Le couple de coordonnées de M est $(x_M ; y_M)$ tel que

$x_M = x_{M'} et\ y_M = x_{M''}$

x_M est l'abscisse du point M dans le repère (O;I;J)

y_M est l'ordonnée du point M dans le repère (O;I;J)

On note $M(x_M ; y_M)$

Remarque :

Si OIJ est un triangle quelconque (non aplati) dans ce cas, OM'MM'' est un parallélogramme.

2.3. Propriété

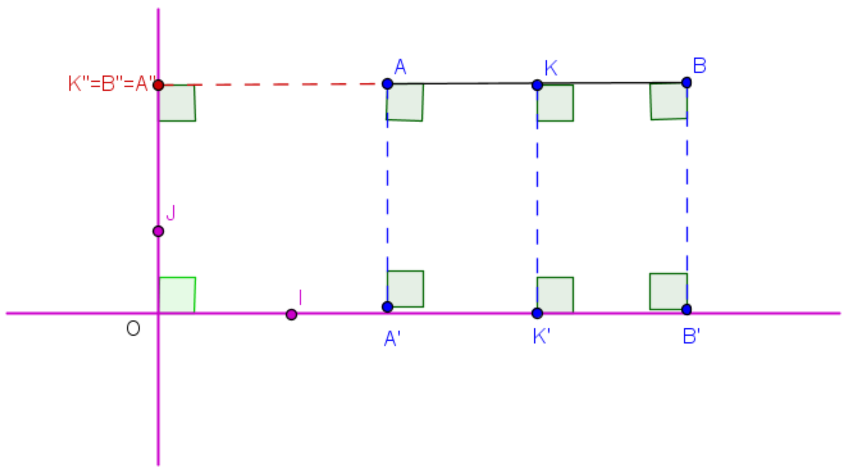
(O;I;J) est un repère orthogonal du plan.

Si K est le milieu de [A B] et si $A(x_A ; y_A)$ **et** $B(x_B ; y_B)$ **alors**
$K(x_K ; y_K)$ $x_K=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ **et** $y_K=\dfrac{y_A+y_B}{2}$

Preuve :

1er cas

On suppose $y_A=y_B$ et $x_A\leq x_B$



ABB'A' est un rectangle

AKK'A' est un rectangle donc **AK = A'K'**

KBB'K' est un rectangle donc **KB = K'B'**

K est le milieu de [A B] donc **AK = KB**

donc **A'K' = K'B'**

donc **K' est le milieu de [A' B']**

donc $x_{K'}=\dfrac{x_{A'}+x_{B'}}{2}$ or $x_{K'}=x_K$ et $x_A=x_{A'}$ et $x_B=x_{B'}$

donc $x_K=\dfrac{x_A+x_B}{2}$

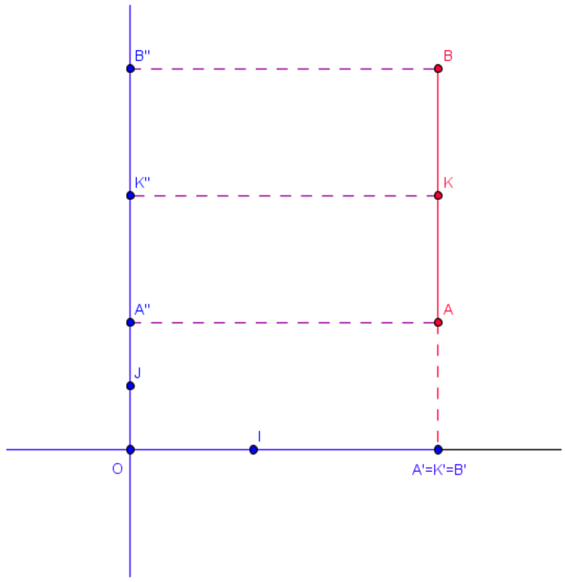
$y_{A''}=y_{B''}=y_{K''}$

$y_{A''}=y_A$ et $y_{B''}=y_B$ et $y_{K''}=y_K$

donc $y_K=\dfrac{y_A+y_B}{2}$

2ème cas

On suppose $x_A=x_B$ et $y_A\leq y_B$



AA'B'B est un rectangle

AA'K'K est un rectangle

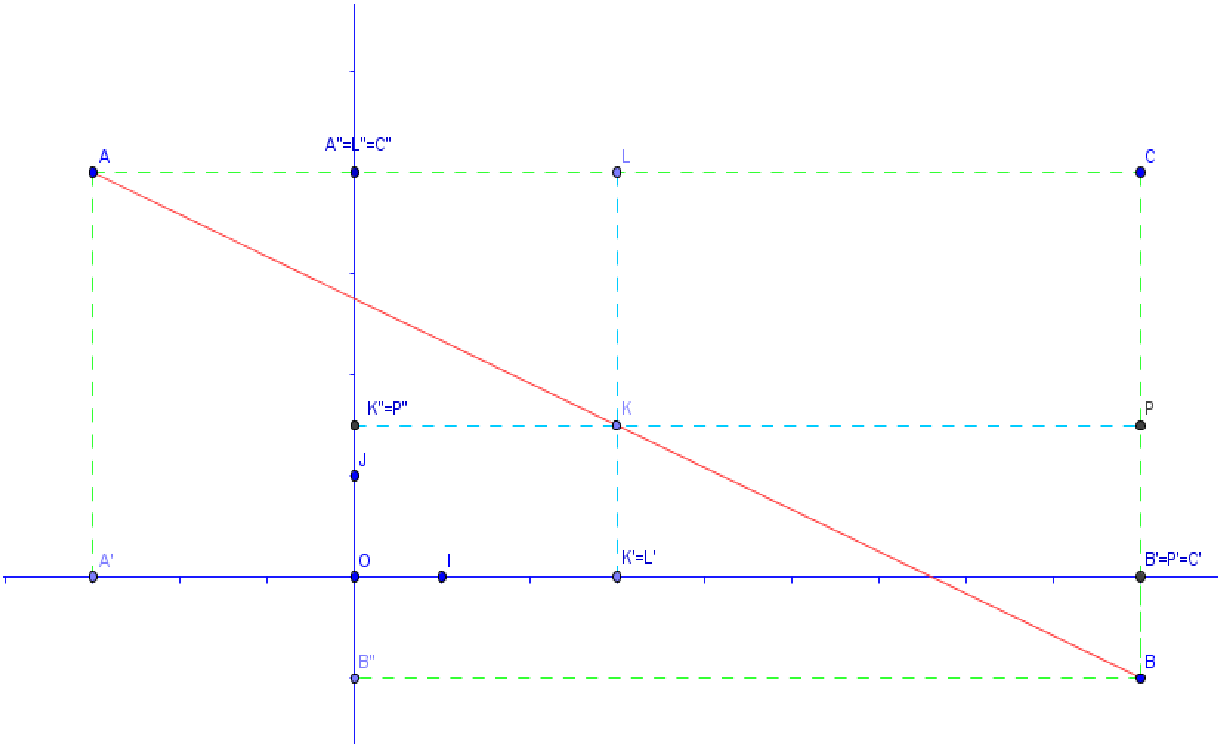
KK'B'B est un rectangle

En suivant le même raisonnement que précédemment, on trouve

donc $x_K = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ $\qquad$ $y_K = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

3ème cas

Cas général : On suppose $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$



On considère le point $C(x_C ; y_C)$ avec $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$

Le triangle ABC est rectangle en C

La parallèle à (BC) passant par K coupe (AC) en L

K est le milieu de [AB] donc **L est le milieu de [AC]**

et $x_L=\frac{x_A+x_C}{2}$ or $x_B=x_C$ $x_L=\frac{x_A+x_B}{2}$

or $x_K=x_L$ donc $x_K=\frac{x_A+x_B}{2}$

La parallèle à (AC) passant par K coupe (BC) en P

K est le milieu de [AB] donc **P est le milieu de [BC]**

et $y_P=\frac{y_C+y_B}{2}$ or $y_C=y_A$ $y_P=\frac{y_A+y_B}{2}$

or $y_K=y_P$ donc $y_K=\frac{y_A+y_B}{2}$

3. Distance de deux points du plan

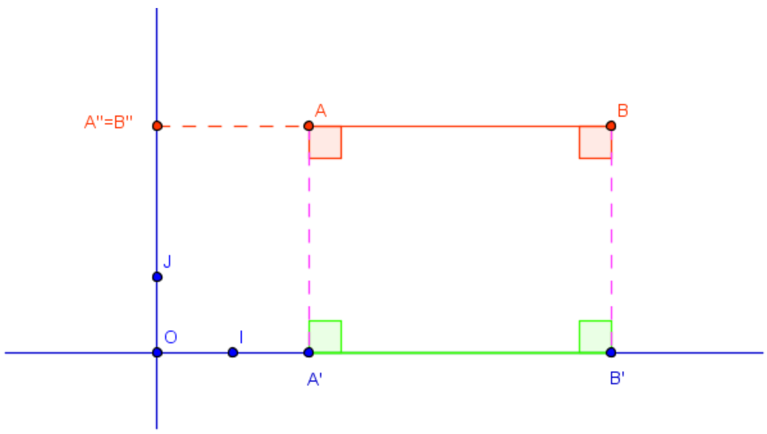
Le repère (O;I;J) est orthonormé

Si $A(x_A;y_A)$ **et** $B(x_B;y_B)$ **alors** $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

1er cas

On suppose $y_A=y_B$ et $x_A\neq x_B$

On suppose que $x_A\leq x_B$



ABB'A' est un rectangle donc **AB = A'B'** $x_A=x_{A'}$ **et** $x_B=x_{B'}$ **et** $y_A=y_B$

Or $A'B'=x_{B'}-x_{A'}$

donc $AB=x_B-x_A$ et $AB^2=(x_B-x_A)^2$

Remarque:

Si $x_A>x_B$

alors $AB=x_A-x_B$ et $AB^2=(x_A-x_B)^2=(x_B-x_A)^2$

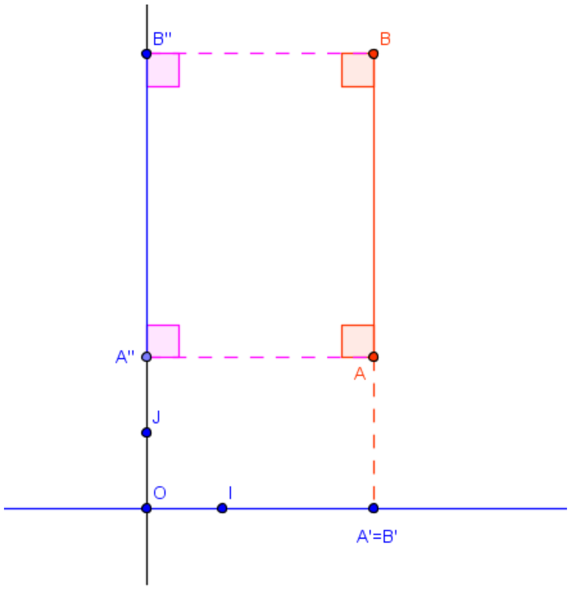
On peut donc écrire :

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2 \quad \text{car} \quad y_B=y_A \quad \text{et} \quad y_B-y_A=0$$

Donc $\quad AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

2^{ème} cas

On suppose $\quad x_A=x_B \quad$ et $\quad y_A \neq y_B$



On suppose que $\quad y_A \leq y_B$

ABB"A" est un rectangle donc **AB = A"B"** $\quad y_A=y_{A''}$ **et** $y_B=y_{B''}$ **et** $x_A=x_B$

Or $\quad A''B''=y_{B''}-y_{A''}$

donc $\quad AB=y_B-y_A \quad$ et $\quad AB^2=(y_B-y_A)^2$

Remarque:

Si $\quad y_A > y_B$

alors $\quad AB=y_A-y_B \quad$ et $\quad AB^2=(y_A-y_B)^2=(y_B-y_A)^2$

On peut donc écrire :

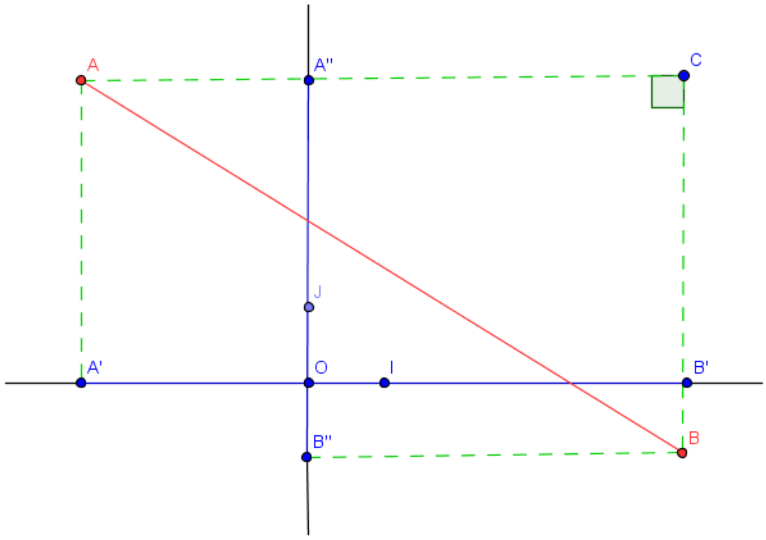
$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2 \quad \text{car} \quad x_B=x_A \quad \text{et} \quad x_B-x_A=0$$

Donc $\quad AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

3ème cas

Cas général.

On suppose $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$



On considère le point $C(x_C\,;y_C)$

On utilise le théorème de pythagore.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AC^2 = (x_C - x_A)^2 = (x_B - x_A)^2$$

$$BC^2 = (y_B - y_C)^2 = (y_B - y_A)^2$$

donc $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ $\qquad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$