Droites parallèles
Droites sécantes du plan

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.

1. Rappel

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

2. Théorème

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan

- ✔ ***(1) Deux droites d et d' d'équations : $x = c$ et $x = c'$ sont parallèles***
- ✔ ***(2) Deux droites d et d' d'équations : $y=mx+p$ et $y=m'x+p'$ sont parallèles si et seulement si : $m = m'$***
- ✔ ***(3) Deux droites d et d' d'équations : $y=mx+p$ et $x = c'$ ne sont pas parallèles***

<u>Preuve</u> :

(1) d : x = c d' : x = c'

$\vec{j}$ est un vecteur directeur de d et d'

(2) $d: y=mx+p$ $d': y=m'x+p'$

$\vec{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{u'}(1;m')$ est un vecteur directeur de d'

$\vec{u'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u'}=\lambda\vec{u}$ (car $\vec{u}\neq\vec{0}$)

$$\vec{u'}=\lambda\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}1=\lambda\times1\\ m'=\lambda m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=1\\ m'=m\end{cases}$$

Les droites d et d' sont parallèles si et seulement si m' = m.

(3) $d: y=mx+p$ $d': x=c'$

$\vec{u}(1;m)$ est un vecteur directeur de d.

$\vec{j}(0;1)$ est un vecteur directeur de d'

$\vec{u'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u'}=\lambda\vec{u}$

$$\vec{u'}=\lambda\vec{u}\Leftrightarrow\begin{cases}0=\lambda\times1\\ 1=\lambda m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=0\\ 1=0\times m\end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution

Donc les droites d et d' ne sont pas parallèles

3. Remarque

d et d' sont deux droites parallèles du plan.

- ✔ Si d et d' ont un point commun alors d et d' sont confondues.

1[er] cas

d : x = c et d' : x = c'

$A(x_A ; y_A) \in d \cap d'$

$A \in d$ donc $x_A = c$

$A \in d'$ donc $x_A = c'$

Donc $c = c'$

2[ème] cas

d : $y = mx + p$ et d' : $y = mx + p'$ $(m = m')$

$A(x_A ; y_A) \in d \cap d'$

$A \in d$ donc $y_A = mx_A + p$ et $p = y_a - mx_A$

$A \in d'$ donc $y_A = mx_A + p'$ et $p' = y_a - mx_A$

Donc $p = p'$

d et d' ont la même équation. Donc ces deux droites sont confondues.

✔ La réciproque de cette proposition est immédiate. d et d' sont deux droites parallèles du plan.
Si d et d' sont confondues alors d et d' ont (au moins) un point commun.

✔ La contraposée de cette proposition :
d et d' sont deux droites parallèles du plan.
Si d et d' ne sont pas confondues alors d et d' n'ont pas de point commun.

On dit que 2 droites parallèles distinctes sont strictement parallèles et $d \cap d' = \emptyset$

4. Rappels

On dit que deux droites non parallèles sont sécantes

Si deux droites sont sécantes, elles ont **un et un seul point** d'intersection.

5. Intersection de deux droites

5.1. Exemple 1

$d : y = 2x - 3$ $d' : y = -3x + 4$

$2 \neq -3$ donc d et d' sont sécantes.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et d', on résout le système :

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = -3x + 4 & (1) \\ y = 2x - 3 & (2) \end{cases}$$

(1) $2x + 3x = 4 + 3$

$5x=7$

$x=\frac{7}{5}$

(2) $y=\frac{2\times 7}{5}-3=\frac{14}{5}-\frac{15}{5}=-\frac{1}{5}$

K est le point d'intersection de d et d'. $K(\frac{7}{5};-\frac{1}{5})$

5.2. Exemple 2

$d: y=4x-5$ $d': x=2$

donc d et d' sont sécantes.

$\begin{cases} x=2 \\ y=4x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4\times 2-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

L est le point d'intersection de d et d'. $L(2;3)$

6. Rappel

Trois points A;B;C sont alignés si et seulement si **ils appartiennent à la même droite.**

7. Alignement de points

$(0;\vec{i};\vec{j})$ Repère du plan.

$A(x_A;y_A)$ $B(x_B;y_B)$ $C(x_C;y_C)$

3 points distincts.

- ✔ 1er cas

  $x_A=x_B$ (ou $x_A=x_C$ ou $x_B=x_C$)

  - Si $x_C\neq x_A$ alors les points ne sont pas alignés.
  - Si $x_C=x_A$ alors les trois points sont alignés (ils appartiennent à la droite d'équation $x=x_A$)

- ✔ **2ème cas**

  $x_A\neq x_B$ (et $x_A\neq x_C$ et $x_B\neq x_C$)

  - On peut utiliser les vecteurs colinéaires.

    Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=0$
  - On peut déterminer une équation de (AB) et regarder si les coordonnées de C sont solutions de cette équation.
  - On peut regarder si les droites (AB) et (AC) sont parallèles, il suffit de calculer les coefficients directeurs des droites (AB) et (AC) et regarder s'ils sont égaux.

$$(AB): m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \qquad (AC): m'=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$$

Exemple :

$A(1;\frac{5}{12})$ $B(3;\frac{7}{4})$ $C(-\frac{1}{4};-\frac{5}{12})$

$$(AB) \quad m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\frac{7}{4}-\frac{5}{12}}{3-1}=\frac{\frac{21-5}{12}}{2}=\frac{\frac{16}{12}}{2}=\frac{\frac{4}{3}}{2}=\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$(AC) \quad m=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-\frac{5}{12}-\frac{5}{12}}{-\frac{1}{4}-1}=\frac{-\frac{5}{6}}{-\frac{5}{4}}=(-\frac{5}{6})\times(-\frac{4}{5})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Donc les points A;B;C sont alignés.

Autre méthode

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix} \quad x_B-x_A=3-1=2 \quad y_B-y_A=\frac{7}{4}-\frac{5}{12}=\frac{21-5}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3} \quad \vec{AB}\begin{pmatrix}2\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix} \quad x_C-x_A=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4} \quad y_C-y_A=-\frac{5}{12}-\frac{5}{12}=-\frac{10}{12}=-\frac{5}{6} \quad \vec{AC}\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\-\frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

$$\det(\vec{AB};\vec{AC})=\begin{vmatrix}2 & -\frac{5}{4}\\\frac{4}{3} & -\frac{5}{6}\end{vmatrix}=2\times\left(-\frac{5}{6}\right)-\left(-\frac{5}{4}\right)\times\left(\frac{4}{3}\right)=-\frac{10}{6}+\frac{20}{12}=0$$

Les points A, B et C sont alignés.

8. Équations cartésiennes

(d) : $ax+by+c=0$ $(a\neq 0$ ou $b\neq 0)$
(d') : $a'x+b'y+c'=0$ $(a'\neq 0$ ou $b'\neq 0)$

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

$\vec{u'}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d').

. (d) et (d') sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{u'})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-b & -b'\\a & a'\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -ab'+a'b=0$

$\Leftrightarrow ab'-a'b=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow ab'=a'b$.

Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ alors $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$.

- ✔ Si $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ alors les droites (d) et (d') sont confondues.
- ✔ Si $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$ alors les droites (d) et (d') sont strictement parallèles.

. (d) et (d') sont sécantes si et seulement si $\begin{vmatrix}a & a'\\b & b'\end{vmatrix}\neq 0$.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection, on doit résoudre le système :

$$\begin{cases} a\,x+b\,y+c=0 \\ a'\,x+b'\,y+c'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\,x+b\,y=-c \\ a'\,x+b'\,y=-c' \end{cases}$$

$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \neq 0$ donc le système admet un unique couple solution.

On peut résoudre le système par addition.

On multiplie la première équation par b’ et la deuxième par -b.

$$\begin{array}{r} ab'x + bb'y = -b'c \\ \underline{-a'bx - bb'y = bc'} \\ (ab'-a'b)x=bc'-b'c \end{array}$$

On multiplie la première équation par -a’ et la deuxième par a.

$$\begin{array}{r} -aa'x - a'by = a'c \\ \underline{aa'x + ab'y = -ac'} \\ (ab'-a'b)y=a'c-ac' \end{array}$$

Le point d’intersection I des droites (d) et (d’) a pour coordonnées : $\left(\dfrac{bc'-b'c}{ab'-a'b};\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b}\right)$.