Fiche Exercices

EXERCICE 1

$\mathcal{R}= (O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.
On considère les points : A(1;2), B(5;4), C(-1 ;-3) et D(1 ;-2).
1. Déterminer une équation des droites (AB), (CD) et (AC).
2. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
3. Donner une équation de la droite d parallèle à (AC) passant par B.
4. Calculer les coordonnées du point d'intersection E de d et (CD).
Que peut-on dire du quadrilatère ABEC ?

EXERCICE 2

$\mathcal{R}= (O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.
On considère les points : A(3 ;-3), $B\left(5;-\frac{17}{3}\right)$ et $C(-6;9)$.
1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AC).
3. Que peut-on conclure ?

EXERCICE 3

$\mathcal{R} = (O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.
On considère les points A(1;4), B(-2 ;-2) et C(5 ;-1).
1.a. Calculer les coordonnées du milieu K de [AB].
1.b. Calculer les coordonnées du point L tel que $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
1.c. Calculer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.
2. Déterminer les équations des trois droites ; (AM), (BL) et (CK).
3. Démontrer que ces trois droites sont concourantes.
On précisera les coordonnées du point de concours.

EXERCICE 4

$\mathcal{R} = (O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.
On considère les points : A(-2;4), B(5 ;-1) et C(-2 ;-2).
1. Déterminer les équations des droites : (AB), (AC) et (BC).
2. Déterminer une équation de la droite d parallèle à (AC) passant par B.
3. Déterminer une équation de la droite d' parallèle à (AB) passant par C.
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites d et d'.

EXERCICE 5

$\mathcal{R}= (O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.
A(-3;-1) B(2;4) C(6;0) D(9;0)

1. Déterminer une équation cartésienne des droites (AB), (BC) et (AD).

2. Démontrer que les droites (BC) et (AD) sont sécantes. On note E le point d'intersection de (BC) et (AD). Calculer les coordonnées du point E.
3. Donner une équation cartésienne de la droite (d_1) parallèle à la droite (AB) passant par E.
   Donner une équation cartésienne de la droite (d_2) parallèle à la droite (BC) passant par A.
4. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes. On note F le point d'intersection de (d_1) et (d_2). Calculer les coordonnées de F.
5. Déterminer la nature du quadrilatère $ABEF$.

CORRECTION

EXERCICE 1

1. Déterminer une équation des droites : (AB), (CD) et (AC).

. A(1;2) B(5;4) $x_A \neq x_B$

Le coefficient directeur de (AB) est : $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{4-2}{5-1}=\dfrac{1}{2}$.

(AB) : $y=\dfrac{1}{2}x+b$ $\quad 2=\dfrac{1}{2}\times 1+b \quad \Leftrightarrow \quad b=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

(AB) : $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$

. C(-1 ;-3) D(1 ;-2) $x_C \neq x_D$

Le coefficient directeur de (CD) est : $a=\dfrac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\dfrac{-2+3}{1+4}=\dfrac{1}{2}$

(CD) : $y=\dfrac{1}{2}x+b$ $\quad -3=\dfrac{1}{2}\times(-1)+b \quad \Leftrightarrow \quad b=-3+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}$.

(CD) : $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$

. A(1;2) C(-1 ;-3) $x_A \neq x_C$

Le coefficient directeur de (AC) est : $a=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\dfrac{-3-2}{-1-1}=\dfrac{5}{2}$

(AC) : $y=\dfrac{5}{2}x+b$ $\quad 2=\dfrac{5}{2}\times 1+b \quad \Leftrightarrow \quad y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{1}{2}$

2. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles

Les coefficients directeurs des droites (AB) et (CD) sont égaux donc ces droites sont parallèles.

3. Donner une équation de la droite d parallèle à(AC) passant par B

d et (AC) sont parallèles donc le coefficient directeur de d est égal à celui de (AC) : $\dfrac{5}{2}$.

d : $y=\dfrac{5}{2}x+b$

La droite d passe par B(5;4) $\quad 4=\dfrac{5}{2}\times 5+b \quad \Leftrightarrow \quad b=4-\dfrac{25}{2}=-\dfrac{17}{2}$

d : $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{17}{2}$

4. Calculer les coordonnées du point d'intersection E de d et (CD)

d : $y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{17}{2}$ $\quad$ (CD) : $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$

Les coefficients directeurs de d et (CD) sont distincts donc d et (CD) sont sécantes.

Pour déterminer les coordonnées du poitt d'intersection E on résout le système : $\begin{cases} y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{17}{2} \\ y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2} \end{cases}$

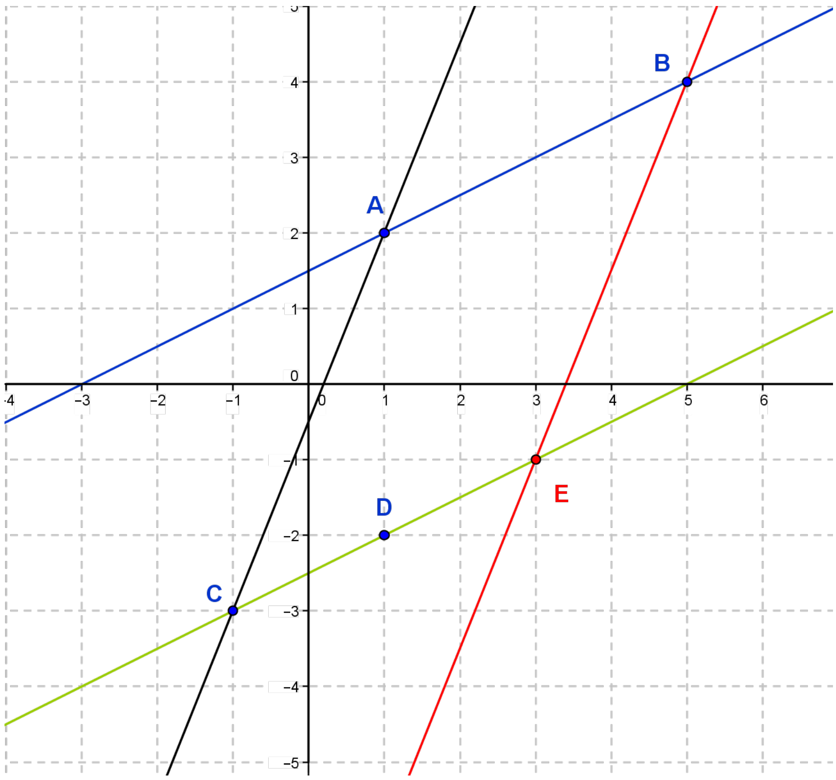
On obtient : $\dfrac{5}{2}x-\dfrac{17}{2}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 5x-17=x-5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x=12 \quad \Leftrightarrow \quad x=3$

$y=\dfrac{5}{2}\times 3-\dfrac{17}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1$

Conclusion

E(3;1)

5. Que peut-on dire du quadrilatère ABEC ?



Le quadrilatère ABEC a ses côtés opposés parallèles deux à deux donc ABEC est un parallélogramme.

EXERCICE 2

A(3 ;-3) $\quad$ B$\left(5;-\frac{17}{3}\right)$ $\quad$ C(-6;9)

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB)

$x_A \neq x_B$

Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\left(-\frac{17}{3}+3\right):(5-3)=\left(-\frac{8}{3}\right):2=-\frac{8}{6}$

$a=-\frac{4}{3}$

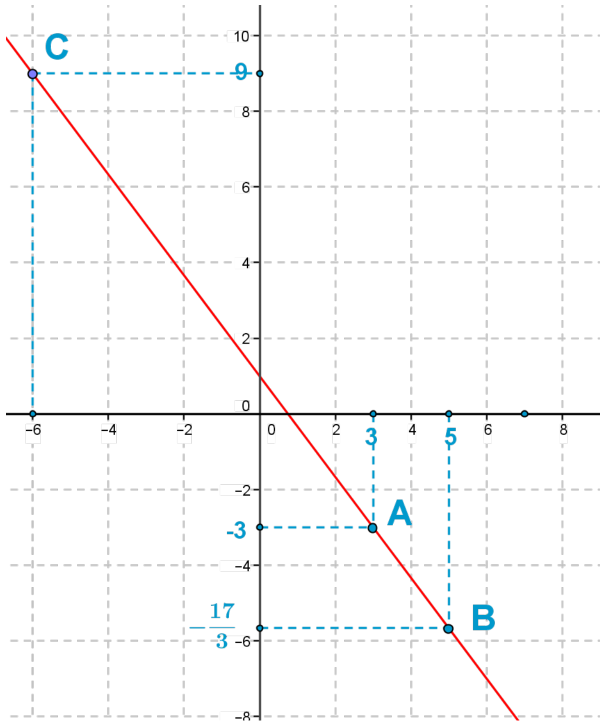
2. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AC)

$x_A \neq x_C$

Le coefficient directeur de la droite (AC) est : $a=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{9+3}{-6-3}=\frac{12}{-9}=-\frac{4}{3}$

3. Que peut-on conclure ?

Les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur, elles sont parallèles (le point A est commun aux deux droites) donc les droites (AB) et (AC) sont confondues et **les points A ; B et C sont alignés.**



EXERCICE 3

A(1;4) B(-2 ;-2) C(5 ;-1)

1.a. Calculer les coordonnées du milieu K de [AB]

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2} \qquad y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{4-2}{2}=1$$

$$K\left(-\frac{1}{2};1\right)$$

1.b. Calculer les coordonnées du point L tel que $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

On note (x;y) le couple de coordonnées du point L.

$L(x;y) \qquad \overrightarrow{AL}(x-1;y-4) \qquad \overrightarrow{AC}(5-1;-1-4) \qquad \overrightarrow{AC}(4;-5)$

$$\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\frac{2}{3}\times 4 \\ y-4=\frac{2}{3}\times(-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{3}+1 \\ y=-\frac{10}{3}+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{11}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases} \qquad L\left(\frac{11}{3};\frac{2}{3}\right)$$

1.c. Calculer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$M(x;y) \qquad \overrightarrow{BM}(x+2;y+2) \qquad \overrightarrow{BC}(5+2;-1+2) \qquad \overrightarrow{BC}(7;1)$

$$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=\frac{2}{3}\times 7 \\ y+2=\frac{2}{3}\times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{14}{3}-2 \\ y=\frac{2}{3}-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{3} \\ y=-\frac{4}{3} \end{cases} \qquad M\left(\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

2. Déterminer les équations des trois droites (AM), (BM) et (CM)

. $A(1;4) \qquad M\left(\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right) \qquad x_A\neq x_M$

Le coefficient directeur de (AM) est :

$$a=\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\left(-\frac{4}{3}-4\right):\left(\frac{8}{3}-1\right)=\left(-\frac{16}{3}\right):\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{16}{3}\times\frac{3}{5}=-\frac{16}{5}$$

$(\mathrm{AM}):\quad y=-\frac{16}{5}x+\mathrm{b} \qquad 4\times-\frac{16}{5}\times1+\mathrm{b} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{b}=4+\frac{16}{5}=\frac{36}{5}$

$(\mathrm{AM}):\quad y=-\frac{16}{5}x+\frac{36}{5}$

. $\mathrm{B}(-2;-2) \qquad \mathrm{L}\left(\frac{11}{3};\frac{2}{3}\right) \qquad x_{\mathrm{B}}\neq x_{\mathrm{L}}$

$\mathrm{a}=\frac{y_{\mathrm{L}}-y_{\mathrm{B}}}{x_{\mathrm{L}}-x_{\mathrm{B}}}=\left(\frac{2}{3}+2\right):\left(\frac{11}{3}+2\right)=\frac{8}{3}:\frac{17}{3}=\frac{8}{3}\times\frac{3}{17}=\frac{8}{17}$

$(\mathrm{BL}):\ y=\frac{8}{17}x+\mathrm{b} \qquad -2=\frac{8}{17}\times(-2)+\mathrm{b} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{b}=-2+\frac{16}{17}=-\frac{18}{17}$

$(\mathrm{BL}):\quad y=\frac{8}{17}x-\frac{18}{17}$

. $\mathrm{C}(5;-1) \qquad \mathrm{K}\left(-\frac{1}{2};1\right) \qquad x_{\mathrm{C}}\neq x_{\mathrm{K}}$

$\mathrm{a}=\frac{y_{\mathrm{K}}-y_{\mathrm{C}}}{x_{\mathrm{K}}-x_{\mathrm{C}}}=(1+1):\left(-\frac{1}{2}-5\right)=2:\left(-\frac{11}{2}\right)=-2\times\frac{2}{11}=-\frac{4}{11}$

$(\mathrm{CK}):\ y=-\frac{4}{11}x+\mathrm{b} \qquad -1=-\frac{4}{11}\times5+\mathrm{b} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{b}=-1+\frac{20}{11}=\frac{9}{11}$

$(\mathrm{CK}):\quad y=-\frac{4}{11}x+\frac{9}{11}$

3. Démontrer que ces trois droites sont concourantes
Préciser les coordonnées du point de concours

Les coefficients directeurs des droites (AM) et (BL) sont distincts donc ces deux droites sont sécantes.
Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection I de ces deux droites, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} y=-\frac{16}{5}x+\frac{36}{5} \\ y=\frac{8}{17}x-\frac{18}{17} \end{cases}$$

On obtient l'équation : $-\frac{16}{5}x+\frac{36}{5}=\frac{8}{17}x-\frac{18}{7} \quad\Leftrightarrow\quad -16\times17x+36\times17=8\times5x-18\times5$

$\Leftrightarrow\quad -272x+612=40x-90 \quad\Leftrightarrow\quad 612+90=(272+40)x \quad\Leftrightarrow\quad 312x=702 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{702}{312}$

On remarque que : $702=2\times3\times13\times9$ et $312=2\times3\times13\times4$

donc $x=\frac{9}{4}$.

$y=-\frac{16}{5}\times\frac{9}{4}+\frac{36}{5}=-\frac{36}{5}-\frac{36}{5}=0$

$\mathrm{I}\left(\frac{9}{4};0\right)$

Pour démontrer que les trois droites (AM), (BL) et (CK) sont concourantes il suffit de vérifier que le point I appartient à la droite (CK).

$(\mathrm{CK}):\quad y=-\frac{4}{11}x+\frac{9}{11} \qquad \mathrm{I}\left(\frac{9}{4};0\right)$

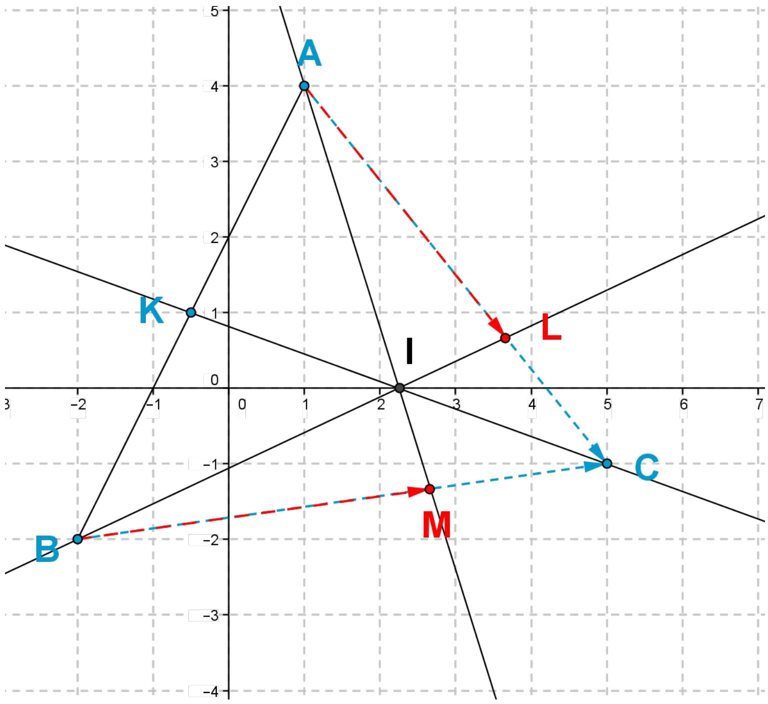
$-\frac{4}{11}\times\frac{9}{4}+\frac{9}{11}=-\frac{9}{11}+\frac{9}{11}=0$

Le point I appartient à la droite (CK).

<u>Conclusion</u>

Les droites (AM), (BL) et (CK) sont concourantes.

Le point $\mathrm{I}\left(\frac{9}{4};0\right)$ est le point de concours.



EXERCICE 4

1. **Déterminer les équations des droites (AB), (AC) et (BC)**

A(-2;4), B(5;-1) ; C(-2;-2)

. A(-2:4) B(5;-1) $x_A \neq x_B$

Le coefficient directeur de (AB) est : $a=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-4}{5+2}=-\frac{5}{7}$

(AB) : $y=-\frac{5}{7}x+b$ $\quad 4-\frac{5}{7}\times(-2)+b \quad \Leftrightarrow \quad b=4-\frac{10}{7}=-\frac{18}{7}$

$(AB): y=-\frac{5}{7}x+\frac{18}{7}$

. A(-2;4) C(-2;-2) $x_A=x_B=-2$

Donc (AC) : $x=-2$

. B(5;-1) C(-2;-2) $x_B \neq x_C$

Le coefficient directeur de (BC :) est : $a=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{-2+1}{-2-5}=\frac{1}{7}$

(BC) : $y=\frac{1}{7}x+b$ $\quad -1=\frac{1}{7}\times 5+b \quad \Leftrightarrow \quad b=-1-\frac{5}{7}=-\frac{12}{7}$

(BC) : $y=\frac{1}{7}x-\frac{12}{7}$

2. Déterminer une équation de la droite d parallèle à (AC) passant par B

(AC) : $x=-2$

(AC) est parallèle à (yy') donc d est aussi parallèle à (yy') et passe par B(5;1) donc :

d : $x=5$.

3. Déterminer une équation de la droite d' parallèle à (AB) passant par C

(AB) : $y=-\frac{5}{7}x+\frac{18}{7}$ $\quad$ C(-2;-2)

d' est parallèle à (AB) donc le coefficient directeur de d' est égal à celui de (AB) : $-\frac{5}{7}$.

d' : $y=-\frac{5}{7}x+b$

d' passe par le point C(-2;-2) $-2=-\frac{5}{7}\times(-2)+b \Leftrightarrow b=-2-\frac{10}{7}=-\frac{24}{7}$

d' : $y=-\frac{5}{7}x-\frac{24}{7}$

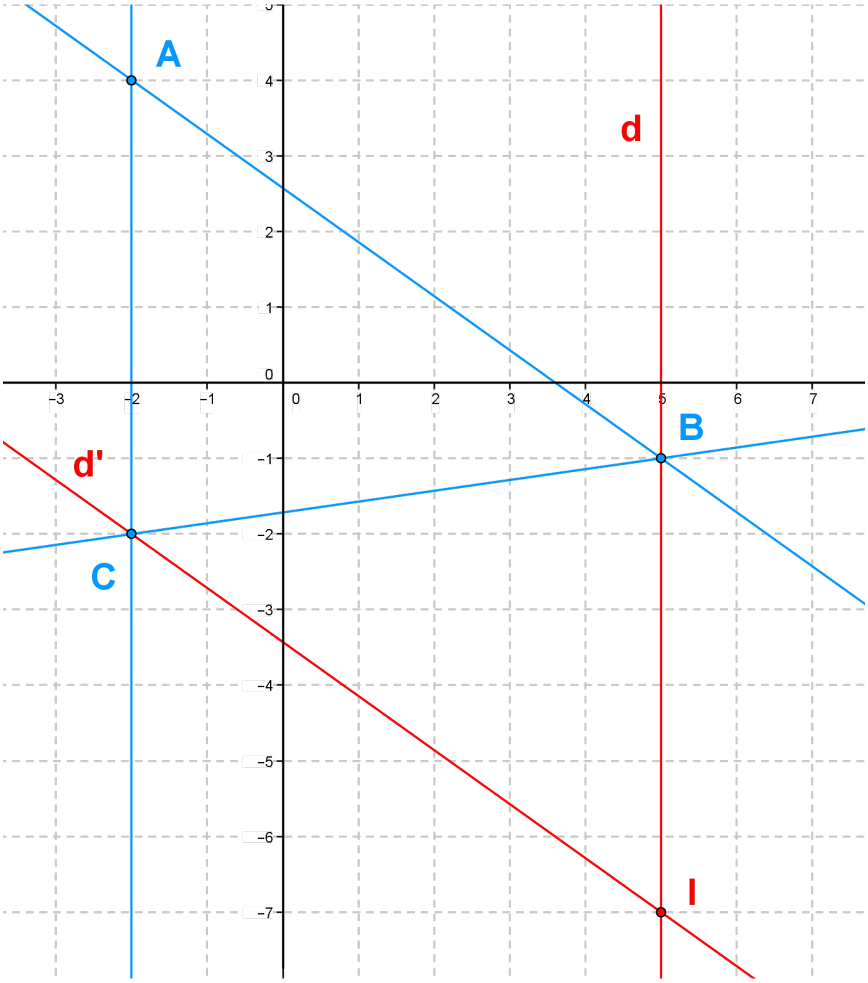
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de d et d'.

On résout le système :

$$\begin{cases} y=-\frac{5}{7}x-\frac{24}{7} \\ x=5 \end{cases}$$

$y=-\frac{5}{7}\times 5-\frac{24}{7}=-\frac{49}{7}=-7$

I(5 ;-7)



EXERCICE 5

1. Équation cartésienne de (AB)

A(-3;-2) B(2;4)

(AB) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

M(x;y) appartient à (AB) $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y+2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ y+2 & 6 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 6\times(x+3)-5\times(y+2)=0 \Leftrightarrow 6x-5y+18-10=0$

$\Leftrightarrow 6x-5y+8=0$

(AB) : 6x-5y+8=0

- **Équation cartésienne de (BC)**

B(2;4) C(6.0)

(BC) est la droite passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{BC}$.

M(x;y) appartient à (BC) $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BC})=0$

$\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-2\\y-4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{BM};\text{BC})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-2 & 4\\ y-4 & 4\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -4\times(x-2)-4\times(y-3)=0 \Leftrightarrow -4x-4y+8+16=0$$

$$\Leftrightarrow -4x-4y+24=0 \Leftrightarrow x+y-6=0$$

(BC) : x+y-6=0

- **Équation cartésienne de (AD)**

A(-3;-2) D(9;0)

(AD) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AD}$

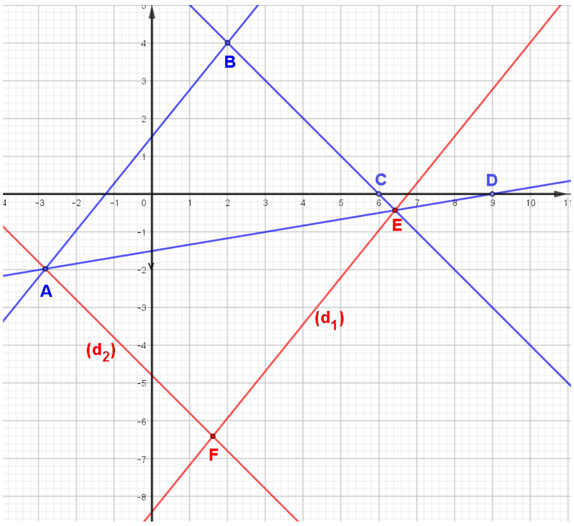
M(x;y) appartient à la droite (AD) $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AD})=0$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y+2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}12\\2\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AD})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+3 & 12\\ y+2 & 2\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2\times(x+3)-12(y+2)=0 \Leftrightarrow 2x-12y+6-24=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-12y-18=0 \Leftrightarrow x-6y-9=0$$

(AD) : x-6y-9=0



2. **Coordonnées du point d'intersection de (BC) et (AD)**

(BC) : x+y-6=0 (AD) : x-6y-9=0

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=1\times(-6)-1\times1=-7\neq0$$

Les droites (BC) et (AD) sont sécantes.

$$\begin{array}{r} x+y-6=0\\ \underline{-x+6y+9=0}\\ 7y+3=0\end{array}$$

$$7y=-3 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{7}$$

$$\begin{array}{r} 6x+6y-36=0\\ \underline{x-6y-9=0}\\ 7x-45=0\end{array}$$

$$7x=45 \Leftrightarrow x=\frac{45}{7}$$

Les coordonnées du point E sont $\left(\frac{45}{7};-\frac{3}{7}\right)$.

3. Équation cartésienne de (d_1).

(d_1) est la parallèle à (AB) passant par E.

(AB) : 6x-5y+8=0 $\quad E\left(\frac{45}{7};-\frac{3}{7}\right)$.

(d_1) : 6x-5y+k=0 (k constante réelle).

$$6\times\left(\frac{45}{7}\right)+5\times\left(\frac{3}{7}\right)+k=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{270}{7}+\frac{15}{7}+k=0 \quad\Leftrightarrow\quad k=-\frac{285}{7}$$

(d_1) : $6x-7y-\frac{285}{7}=0$

. Équation cartésienne de (d_2)

(d_2) est la parallèle à (BC) passant par A.

(d_2) : x+y+k=0 (k constante réelle) A(-3;-2)

-3-2+k=0 $\Leftrightarrow$ k=5

(d_2) : x+y+5=0

4. Coordonnées du point d'intersection de (d_1) et (d_2)

(d_1) : $6x-5y-\frac{285}{7}=0 \qquad (d_2)$: $x+y+5=0$

$$\begin{cases} 6x-5y=\frac{285}{7} \\ x+y=-5 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=6+5=11\neq 0$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.

$$\begin{array}{l} 6x-5y=\frac{285}{7} \\ 5x+5y=-25 \\ \hline 11x=\frac{285-175}{7} \end{array}$$

$$11x=\frac{110}{7} \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{110}{7\times 11}=\frac{10}{7}$$

$$\begin{array}{l} 6x-5y=\frac{285}{7} \\ -6x-6y=30 \\ \hline -11y=\frac{285+210}{7} \end{array}$$

$$-11y=\frac{495}{7} \quad\Leftrightarrow\quad y=-\frac{495}{7\times 11}=-\frac{45}{7}$$

$F\left(\frac{10}{7};-\frac{45}{7}\right)$

5. Les cotés du quadrilatère ABEF sont parallèles deux à deux, ce quadrilatère est un parallélogramme.