Fiche exercices

EXERCICE 1

Voici une liste de nombres:

$$0{,}45 \ ; \ \sqrt{3} \ ; \ \frac{3}{5} \ ; \ -12 \ ; \ \frac{91}{7} \ ; \ 10^4 \ ; \ \frac{\pi}{2} \ ; \ 10^{-2} \ ; \ \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}} \ ; \ \frac{4}{3}$$

Donner les nombres entiers
Donner les nombres décimaux qui ne sont pas entiers
Donner les nombres rationnels qui ne sont pas décimaux
Donner les nombres irrationnels

EXERCICE 2

Donner le développement décimal illimité périodique de $\frac{1}{11}$ puis de $\frac{1}{13}$

EXERCICE 4

Nous savons que tout nombre rationnel non décimal admet un développement décimal illimité périodique, c'est à dire:
si a est un rationnel non décimal alors a admet un développement décimal illimité périodique

La réciproque de cette proposition est-elle vraie?
A-t-on: si a admet un développement décimal illimité périodique alors a est un rationnel non décimal

On se propose de démontrer ce résultat sur un exemple, c'est à dire de montrer que si a admet un développement décimal illimité périodique alors a peut s'écrire sous forme de fraction (le développement décimal étant illimité le nombre a n'est pas un décimal)

$a=0{,}1314\ \underline{1314}$
Écrire le nombre a sous forme de fraction.

EXERCICE 5

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, il faut démontrer que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

Pour effectuer cette démonstration, on va utiliser un raisonnement par l'absurde, c'est à dire on suppose que l'on puisse écrire $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers relatifs non nuls et le pgcd de a et b égal à 1 (c'est à dire $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible) et on doit démontrer qu'il y a une contradiction avec cette hypothèse, ici on va montrer que a et b ne sont pas premiers entre eux.

1. $a\in\mathbb{N}$. Vérifier que le chiffre des unités de a^2 est égal au chiffre des unités du carré du chiffre des unités de a, c'est à dire, compléter le tableau:

Chiffre des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^2										

2. Montrer que si $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ alors $a^2=2b^2$

3. Compléter le tableau:

Chiffre des unités de b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2b^2$										

4. Conclure

CORRECTION

EXERCICE 1

Les nombres entiers: $-12\ ;\ \frac{91}{7}=13\ ;\ 10^4=10000$

Les nombres décimaux qui ne sont pas entiers: $0{,}45\ ;\ \frac{3}{5}=0{,}6\ ;\ 10^{-2}=0{,}01\ ;\ \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{25}}=\frac{9}{5}=1{,}8$

Les nombres rationnels qui ne sont pas décimaux: $\frac{4}{3}$

Les nombres irrationnels: $\sqrt{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}$

EXERCICE 2

$$
\begin{array}{l|l}
1{,}0\ 0\ 0\ 0 & \underline{1\ 1} \\
1\ 0 & 0{,}0\ 9\ 0\ 9 \\
1\ 0\ 0 & \\
\quad 1\ 0 & \\
\quad 1\ 0\ 0 & \\
\qquad\ 1 &
\end{array}
$$

$\frac{1}{11}\approx 0{,}0909\ldots$

$$
\begin{array}{l|l}
1{,}0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 & \underline{1\ 3} \\
1\ 0 & 0{,}0\ 7\ 6\ 9\ 2\ 3\ 0\ 7\ 6\ 9\ 2\ 3 \\
1\ 0\ 0 & \\
\quad 9\ 0 & \\
\quad 1\ 2\ 0 & \\
\qquad 3\ 0 & \\
\qquad\ 4\ 0 & \\
\qquad\quad 1\ 0 & \\
\qquad\quad 1\ 0\ 0 & \\
\qquad\qquad 9\ 0 & \\
\qquad\qquad 1\ 2\ 0 & \\
\qquad\qquad\quad 3\ 0 & \\
\qquad\qquad\quad\ 4\ 0 & \\
\qquad\qquad\qquad 1 &
\end{array}
$$

$\frac{1}{13}\approx 0{,}076923076923\ldots$

EXERCICE 3

$a=0{,}1314\ \underline{1314}$

a admet un développement décimal illimité périodique. La période contient 4 chiffres « 1314 ».
Si on multiplie a par 10000, on obtient un nombre ayant le même développement décimal

$10000\times a=1314{,}1314\ \underline{1314}$
$\qquad a=\quad 0{,}1314\ \underline{1314}$

On soustrait les deux équations:
$9999a=1314$

$a=\frac{1314}{9999}=\frac{146}{1111}$

EXERCICE 4

1.

Exemples: $12413=a=12410+3$

$a^2=(12410+3)^2=12410^2+2\times 12410\times 3+3^2$

$=12410^2+6\times 12410+9$

Le chiffre des unités est 9

$a=417=410+7$

$a^2=(410+7)^2=410^2+2\times 410\times 7+7^2$

$=410^2+14\times 410+49$

Le chiffre des unités est 9

Chiffre des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a²	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Remarque: le chiffre des unités d'un « carré parfait » ne peut pas être égal à 2; 3; 7; 8.

2. Si $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ alors $a=\sqrt{2}\ b$ et $a^2=2b^2$

3.

Chiffre des unités de b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de 2b²	0	2	8	6	2	0	2	8	8	2

4. Si $a^2=2b^2$ alors le chiffre des unités de a^2 est égal au chiffre des unités de $2b^2$
Donc a^2 et $2b^2$ ont pour chiffre des unités 0
Le chiffre des unités de a est 0, celui de $2b^2$ est 0 ou 5.

Conséquence: a et b sont divisibles par 5 et la fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas irréductible.

<u>Conclusion:</u> on ne peut pas écrire $\sqrt{2}$ sous forme de fraction irréductible et le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.