Équations de droites

1. Introduction

On peut déterminer géométriquement une droite du plan de différentes manières.

- ✔ Par deux points distincts passe une droite unique
- ✔ Par un point, on mène une parallèle unique à une droite donnée.
- ✔ Par un point, on mène une perpendiculaire unique à une droite donnée (Cas particulier : médiatrice d'un segment ou hauteur d'un triangle)
- ✔ Symétrique d'une droite par rapport à un point ou une droite
- ✔ Bissectrice d'un angle
- ✔ etc ….

2. Courbe représentative d'une fonction affine.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = mx + p$$

m et p sont deux nombres réels donnés.

La courbe représentative de f dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est une droite. Donc pour tout point $M(x ; y)$ de la droite on a :

$$y = mx + p$$

3. Problème

Peut on toujours définir une droite comme courbe représentative d'une fonction affine ?

3.1. Remarque

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est un repère du plan.

Pour toute fonction affine f, pour toute valeur de la variable x, il existe une image et une seule $y = f(x)$.

Donc il ne peut pas avoir deux points distincts de la courbe représentative de f ayant la même abscisse.

3.2. Conséquence

On considère la droite $A(x_A ; y_A)$ $B(x_B ; y_B)$ $A \neq B$

Si $x_A = x_B$ alors la droite (AB) n'est pas la courbe représentative d'une fonction affine.

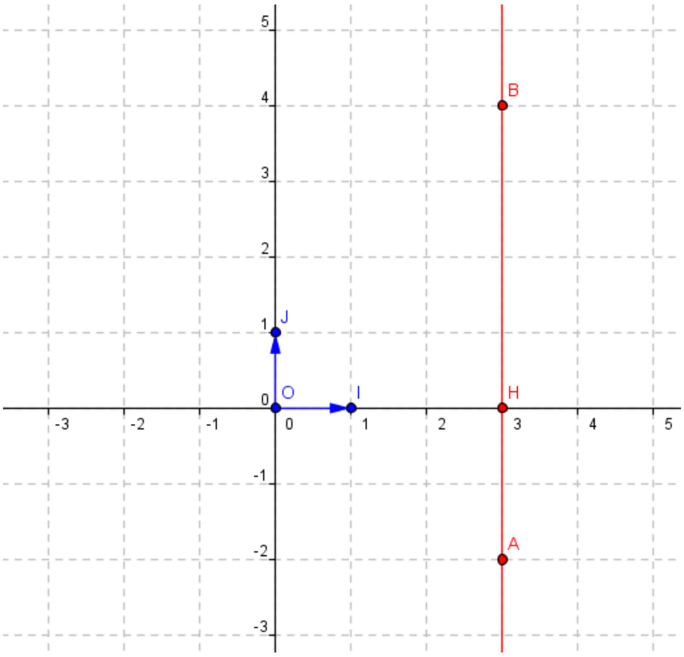
4.Caractérisation analytique d'une droite.

$(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est un repère du plan.

On considère la droite (AB) $A \neq B$

4.1. Premier cas :

$x_A = x_B$



$A(x_A ; y_A)$ $B(x_B ; y_B)$

Soit $H(x_A ; 0)$ la droite (AB) est la droite passant par H et perpendiculaire à l'axe $(x'x)$ (ou parallèle à $(y'y)$)

L'abscisse d'un point quelconque de la droite (AB) est : x_A

$M(x ; y) \in (AB) \Leftrightarrow x = x_A$

On dit que $x = x_A$ est une équation de la droite (AB)

Pour le dessin : x = 3 est une équation de la droite (AB)

4.2. Deuxième cas :

$x_A \neq x_B$

Exemple :

$A(1 ; 3)$; $B(3 ; -1)$; $M(x ; y)$

$M \in (AB) \Leftrightarrow$ les points A;B;M sont alignés $\Leftrightarrow$ Il existe un nombre réel λ tel que :

$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}(3-1 ; -1-3)$ $\overrightarrow{AB}(2 ; -4)$ $\overrightarrow{AM}(x-1 ; y-3)$

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \lambda(2) \\ y-3 = \lambda(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2\lambda & (1) \\ y-3 = -4\lambda & (2) \end{cases}$$

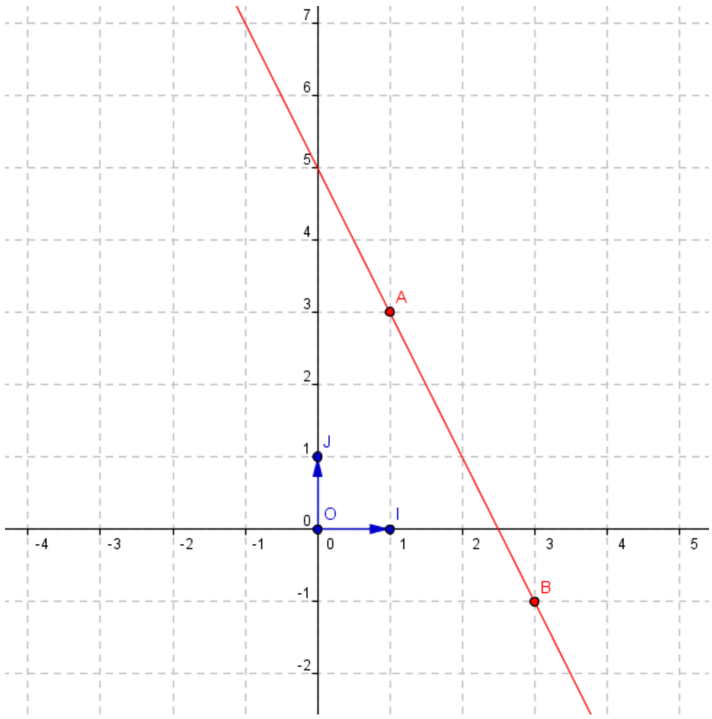
(1) $\lambda = \frac{x-1}{2}$

(2) $y-3 = -4\left(\frac{x-1}{2}\right)$ $y-3 = -2x+2$

$y = -2x+5$

$M(x ; y) \in (AB) \Leftrightarrow y = -2x+5$

On dit que : y = -2x + 5 est une équation de (AB)



$A(x_A;y_A) \quad B(x_B;y_B) \quad M(x;y)$

$\vec{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A) \quad \vec{AM}(x-x_A;y-y_A)$

$$\vec{AM}=\lambda\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x_A=\lambda(x_B-x_A) & (1) \\ y-y_A=\lambda(y_B-y_A) & (2) \end{cases}$$

(1) $\quad x_B-x_A \neq 0 \quad \lambda=\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}$

(2) $\quad y-y_A=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A)$

On pose $\quad m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

Donc $\quad y-y_A=m(x-x_A)$

$y=mx-mx_A+y_A$

On pose $\quad p=-mx_A+y_A$

$y=mx+p$

$M(x;y)\in(AB)\Leftrightarrow y=mx+p$

On dit que $\quad y=mx+p \quad$ est une équation de (AB) et (AB) est la courbe représentative de la fonction affine

$x \longmapsto$ f(x) = mx +p $\quad$ dans $(O;\vec{i};\vec{j})$

4.3. Conclusion

Dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ***toute droite d a une équation de la forme :***

$y=mx+p$ ***ou*** $x=c$

m, p, c sont des constantes.

5. Vecteurs directeurs d'une droite

d est une droite du plan.

Soit A et B deux points distincts de d, on dit que $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de d (deux vecteurs directeurs de d sont donc colinéaires).

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.

$\vec{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$

✔ Si $\quad x_B=x_A \quad$ alors $\quad \vec{AB}(0;y_B-y_A) \quad \vec{AB}=(y_B-y_A)\vec{j}$

Pour l'exemple (IV premier cas)

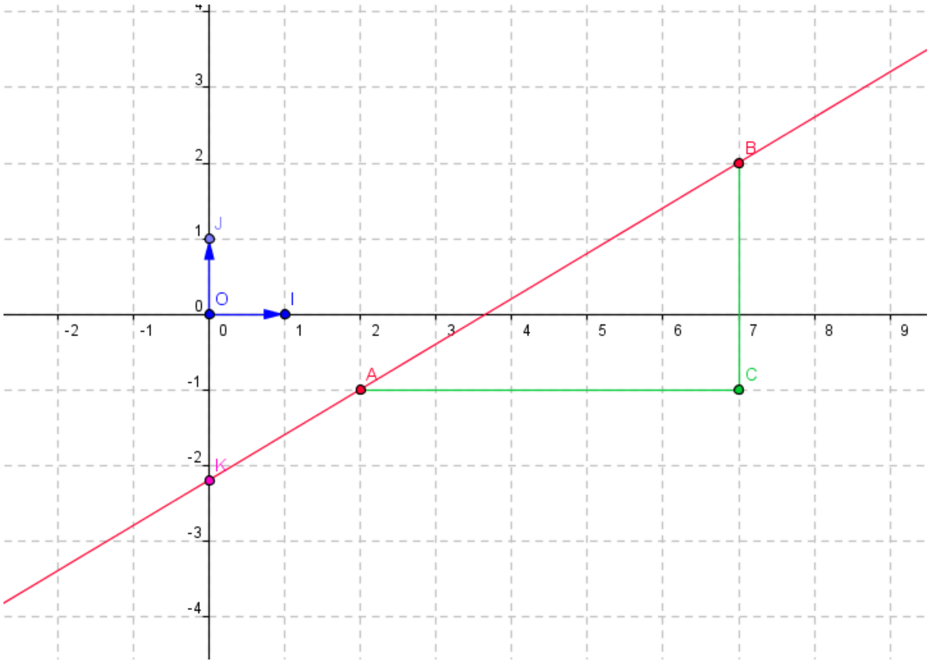
$A(3;-2) \quad B(3;4)$

$\vec{AB}(0;6) \quad \vec{AB}=6\vec{j}$

✔ Si $\quad x_B \neq x_A \quad$ alors on considère le point C de coordonnées $(x_B;y_A)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ $\quad\overrightarrow{AC}(x_B-x_A;0)$ $\quad\overrightarrow{AC}=(x_B-x_A)\vec{i}$

$\overrightarrow{CB}(0;y_B-y_A)$ $\quad\overrightarrow{CB}=(y_B-y_A)\vec{j}$



Pour l'exemple, $A(2\,;-1)$, $B(7\,;2)$, $\overrightarrow{AB}(5\,;3)$ $\quad\overrightarrow{AC}=5\vec{i}$ $\quad\overrightarrow{CB}=3\vec{j}$

6. Coefficient directeur d'une droite - Ordonnée à l'origine

Si $x_B\neq x_A$ alors une équation de la droite d=(AB) est :

$$y=mx+p$$

- m : se nomme **le coefficient directeur** de la droite d
- p : se nomme **ordonnée à l'origine**

L'ordonnée du point de la droite (AB) ayant pour abscisse 0 est p $\quad K(0;p)$

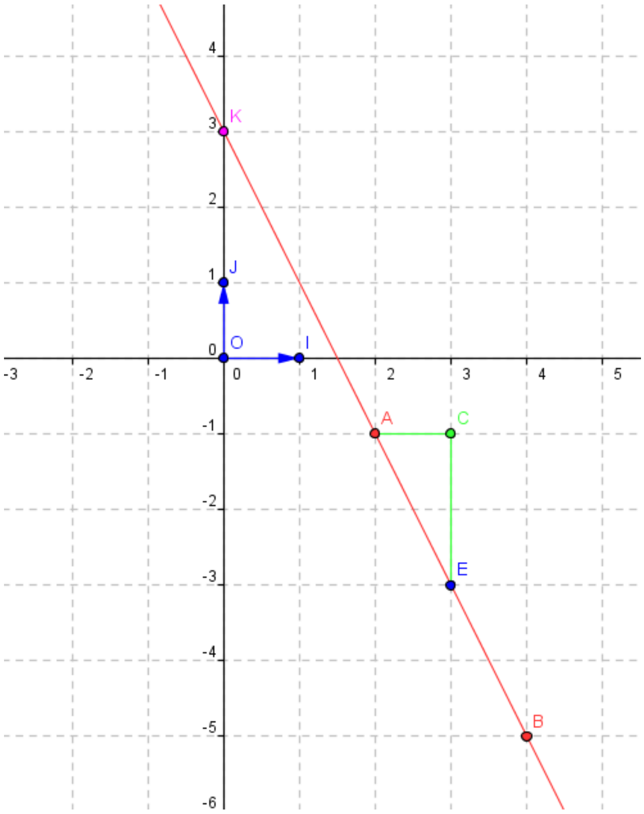
Nous avons vu que :

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$$

$$\vec{u}=\frac{1}{x_B-x_A}\overrightarrow{AB}\left(1;\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\right)$$

$\vec{u}(1\,;m)$ $\quad\vec{u}$ est un vecteur directeur de d.



$\overrightarrow{AE} = \vec{u}(1\,;m)$ d = (AE)

$\overrightarrow{AC}(1\,;0)$ $\overrightarrow{AC} = \vec{i}$

$\overrightarrow{CE}(0\,;m)$ $\overrightarrow{CE} = m\,\vec{j}$

Pour l'exemple $A(2\,;-1)$, $B(4\,;-5)$, $C(3\,;-1)$, $E(3\,;-3)$

$\overrightarrow{CE} = -2\,\vec{j}$ m = -2

Remarque

Ce résultat permet de tracer une droite connaissant son équation : $y = mx + p$

On détermine un point de la droite : A (on donne une valeur à x et on calcule y)

On peut choisir K et on construit C et E $C(x_A+1\,;y_A)$ $E(x_C\,;y_C+m)$

7. Equation cartésienne d'une droite

On considère le repère $\mathscr{R} = (\mathrm{O}\,;\vec{\mathrm{i}}\,;\vec{\mathrm{j}})$ du plan.

$\mathrm{A}(x_A;y_A)$ est un point du plan , $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ est un vecteur non nul ($\alpha \neq 0$ **ou** $\beta \neq 0$).

d est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

M(x;y) appartient à la droite d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\ y - y_B\end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$.

M(x;y) appartient à la droite d $\Leftrightarrow$ $\det(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{vmatrix}x - x_A & \alpha\\ y - y_B & \beta\end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0$

On pose $a=\beta$ et $b=\alpha$ et $c=-\beta x_A+\alpha y_A$.

$\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul donc $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.

M(x;y) appartient à la droite d $\Leftrightarrow$ $ax+by+c=0$ avec $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.

ax+by+c=0 est une équation cartésienne de la droite d.

Remarques

$a\neq 0$ ou $b\neq 0$. Si b=0 alors $a\neq 0$ et $ax+by+c=0$ $\Leftrightarrow$ $x=-\frac{c}{a}$ (constante).

. Si $b\neq 0$ alors $ax+by+c=0$ $\Leftrightarrow$ $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.

On pose $-\frac{a}{b}=m$ et $-\frac{c}{b}=p$ on obtient $y=mx+p$.

. Conclusion

L'ensemble des points M(x;y) tels que ax+by+c=0 ($a\neq 0$ ou $b\neq 0$) est une droite.

. Si on multiplie les trois coefficients a, b