Fonctions affines
Équations et inéquations du premier degré

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. Fonctions affines

1.1.Définitions

On nomme fonction affine, toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

f(x) = mx+p *(m et p sont deux nombres réels donnés).*

Par exemple : f(x) = 2x – 3

- ✔ *Si p = 0, on dit la fonction est linéaire (Exemple : f(x) = -2x)*
- ✔ *Si m = 0, on dit que la fonction est constante (Exemple : f(x) = 3)*

1.2. Représentation graphique

La courbe représentative de la fonction affine définie par f(x) = mx+p est une droite (on dit la droite d'équation : y=mx+p)

- ✔ m est le coefficient directeur de la droite
- ✔ Si p = 0, la droite passe par l'origine

1.3. Exemple 1 : cas d'une fonction croissante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x - 3$$

Etude de variations de f

1ère méthode

a et b sont deux nombres réels.

On suppose a < b, on doit comparer f(a) et f(b), c'est à dire 2a-3 et 2b-3.

- ✔ Pour cela comme a<b, on multiplie les deux membres de l'inégalité par 2 (2 est strictement positif, on conserve donc le même sens de l'inégalité). On obtient :

$$\boxed{2a < 2b}$$

- ✔ On ajoute -3 aux deux membres de l'inégalité

$$\boxed{2a-3 < 2b-3 \text{ soit } f(a) < f(b)}$$

On a bien démontré que :

si a < b alors f(a) < f(b)

c'est à dire f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2ème méthode

a < b veut dire 0 < b – a.

Pour comparer f(a) et f(b), on va donc étudier le signe de la différence de f(b) – f(a).

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

- ✔ Si cette différence est positive alors f(a) < f(b) et la fonction est strictement **<u>croissante</u>** sur $\mathbb{R}$.
- ✔ Si cette différence est négative alors f(a) > f(b) et la fonction est strictement **<u>décroissante</u>** sur $\mathbb{R}$.

Revenons à notre exemple :

f(b) – f(a) = 2b – 3 – (2a – 3) = 2b – 3 – 2a +3 = 2(b – a)

2 est positif et (b – a) est positif donc le produit des 2 nombres est positif,

soit f(b) – f(a) > 0

et f(a) < f(b)

c'est à dire f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

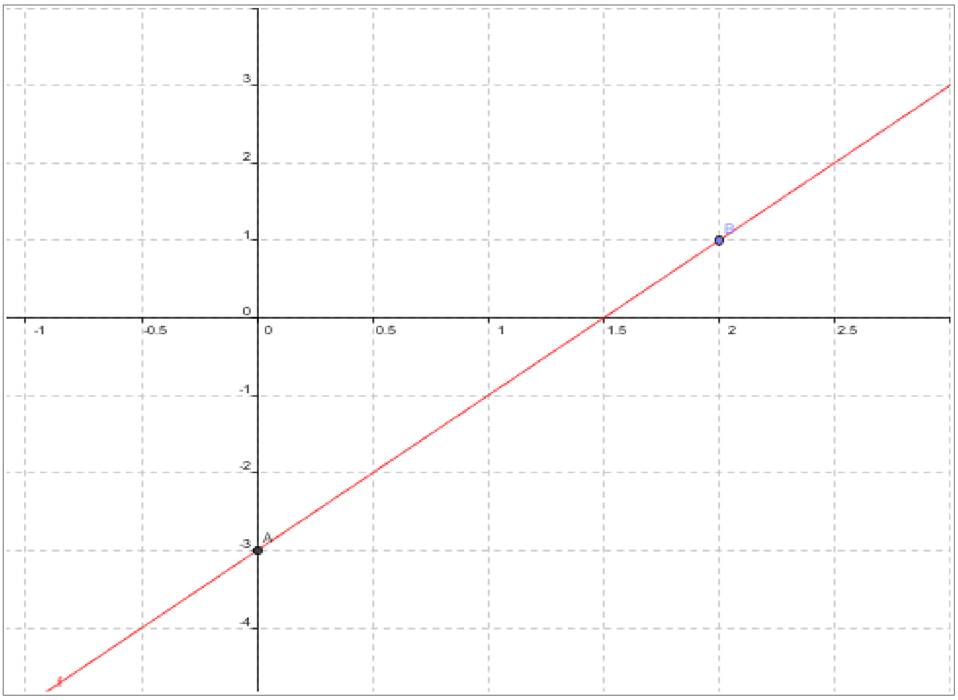
Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x) = 2x – 3		

Tracé de la courbe

La courbe est une droite, pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points.

x	*0*	*2*
f(x)	*-3*	*1*



Résolution graphique f(x) = 0

- ✔ On trouve x = 1,5.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Tableau des signes

- ✔ Sur $]1{,}5\,;+\infty[$ la courbe est strictement au dessus de l'axe des abscisses. Donc pour x ∈ $]1{,}5\,;+\infty[$ f(x) > 0
- ✔ Sur $]-\infty\,;1{,}5[$ la courbe est strictement au dessous de l'axe des abscisses. Donc pour x ∈ $]-\infty\,;1{,}5[$ f(x) < 0

x	$-\infty$		1,5		$+\infty$
$f(x)$		–	0	+	

1.4 Exemple 2 : cas d'une fonction décroissante

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = -\frac{1}{2}x+1$$

Etude de variations de f

1ère méthode

a et b sont deux nombres réels.

On suppose a < b, on doit comparer f(a) et f(b), c'est à dire $-\frac{1}{2}a+1 \ et -\frac{1}{2}b+1$

- ✔ Pour cela comme a<b, on multiplie les deux membres de l'inégalité par $-\frac{1}{2}$ ($-\frac{1}{2}$ est strictement négatif, on change donc le même sens de l'inégalité). On obtient :
$$-\frac{1}{2}a > -\frac{1}{2}b$$
- ✔ On ajoute 1 aux deux membres de l'inégalité
$$-\frac{1}{2}a+1 > -\frac{1}{2}b+1 \ soit \ f(a) > f(b)$$

On a bien démontré que :

si a < b alors f(a) > f(b)

c'est à dire f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

2ème méthode

a < b veut dire 0 < b – a.

Pour comparer f(a) et f(b), on va donc étudier le signe de la différence de f(b) – f(a).

- ✔ Si cette différence est positive alors f(a) < f(b) et la fonction est strictement **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- ✔ Si cette différence est négative alors f(a) > f(b) et la fonction est strictement **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Revenons à notre exemple :

$$f(b)-f(a)=-\frac{1}{2}b+1-(-\frac{1}{2}a+1)=-\frac{1}{2}b+1+\frac{1}{2}a-1=-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}a=-\frac{1}{2}(b-a)$$

$-\frac{1}{2}$ est négatif et (b – a) est positif

soit f(b) – f(a) < 0

et f(a) > f(b)

c'est à dire f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

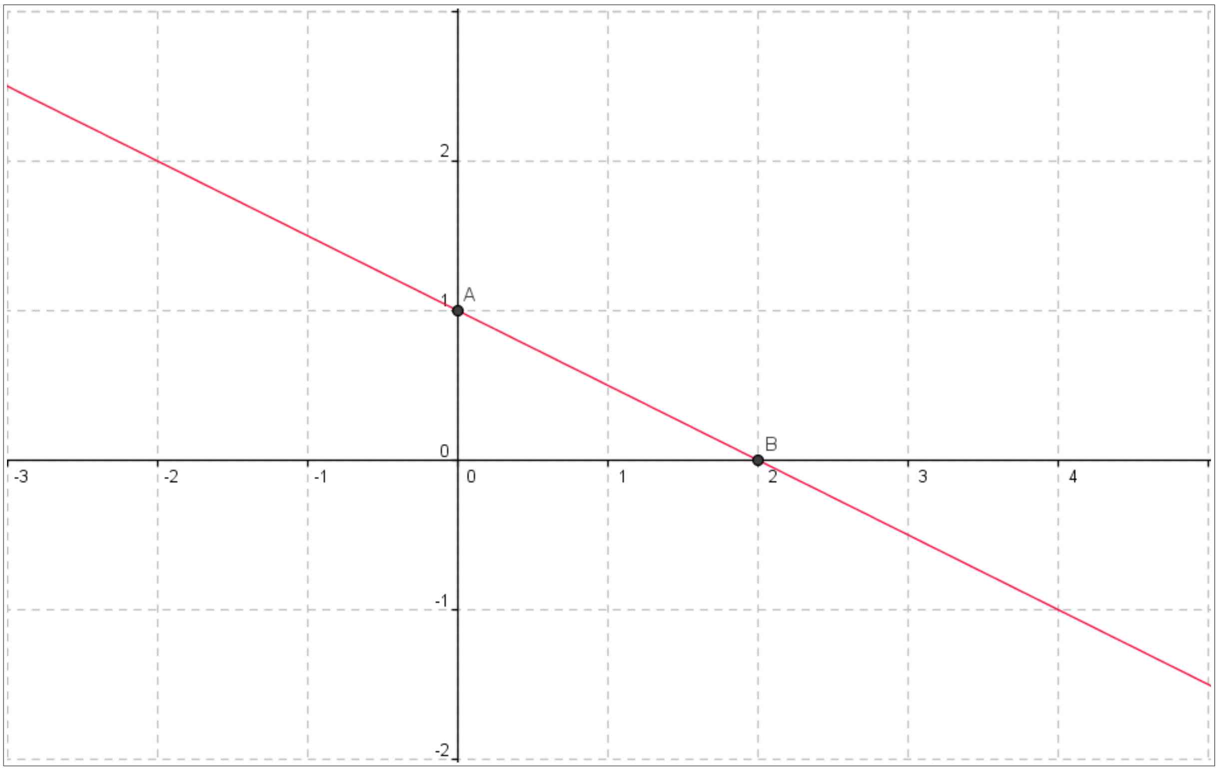
Tableau de variations

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)=-\frac{1}{2}x+1$	$\searrow$

Tracé de la courbe

La courbe est une droite, pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points.

x	0	2
$f(x)$	1	0



Résolution graphique f(x) = 0

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

- ✔ On trouve x = 2

Tableau des signes

- ✔ Sur]-∞;2[la courbe est strictement au dessus de l'axe des abscisses. Donc pour x ∈]-∞;2[f(x) > 0
- ✔ Sur]2;+∞[la courbe est strictement au dessous de l'axe des abscisses. Donc pour x ∈]2;+∞[f(x) < 0

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)		+	0	-	

1.5.Exemple 3 : cas d'une fonction constante

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2$$

Etude de variations de f

$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $f(b) = f(a) = 2$

On a bien démontré que :
f est constante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)=2$	$\longrightarrow$	

Tracé de la courbe

La courbe est une droite, pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points.

x	*0*	*3*
f(x)	*2*	*2*

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

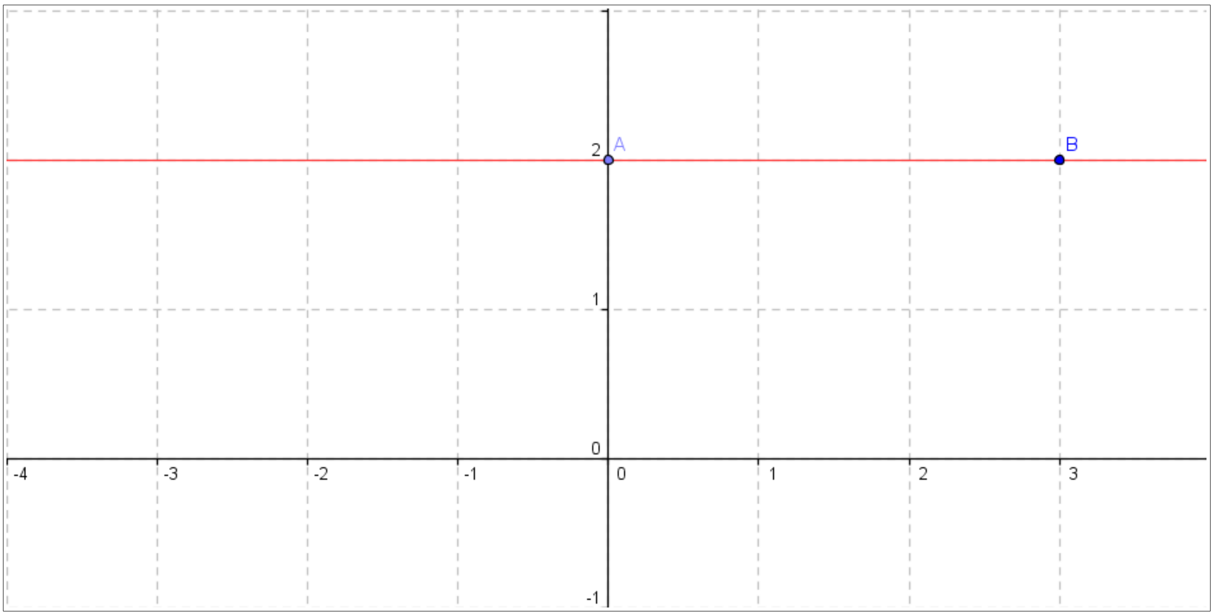


Tableau des signes

- ✔ f(x) = 2 > 0

x	$-\infty$ $+\infty$
f(x)=2	+

1.6. Conclusion

On admet les résultats suivants :

f(x) = mx+p

- ✔ Si le coefficient de x **m est strictement positif**, alors ***f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
- ✔ *Si le coefficient de x* ***m est strictement négatif****, alors* ***f est strictement décroissante sur*** $\mathbb{R}$
- ✔ *Si le coefficient de x* ***m est nul (m=0)****, alors* ***f est la fonction constante égale à p***

1

1.7.Propriétés

- ✔ Si f est une ***application linéaire*** alors le tableau de valeurs est un tableau de proportionalité.

Exemple

f(x) = 0,1x

x10

x	0	1	5	10	13	24
f(x)	0	0,1	0,5	1	1,3	2,4

x0,1

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

- Si f est une ***application affine*** alors le tableau de valeurs **n'est pas** un tableau de proportionalité.

Exemple

f(x) = -3x + 5

x	0	1	3	4	5	10	17	20
f(x)	5	2	-4	-7	-10	-25	-46	-55

On remarque que si on choisit a et b distincts appartenant à l'ensemble des valeurs de x du tableau, et que l'on calcule les rapports $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ on remarque que l'on obtient toujours la même valeur

- a=0 et b = 20

$$\frac{f(20)-f(0)}{20-0}=\frac{-55-5}{20}=\frac{-6}{3}=-3$$

- a=1 et b=5

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{-10-2}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

- a=10 et b=17

$$\frac{f(17)-f(10)}{17-10}=\frac{-46+25}{7}=\frac{-21}{7}=-3$$

- a=4 et b=0

$$\frac{f(0)-f(4)}{0-4}=\frac{5+7}{-4}=-3$$

-3 est le coefficient de x ou le coefficient directeur de la droite représentative de f

2. Equations et inéquations du 1er degré à une inconnue

2.1 Exemple 1

Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante :

$$\frac{x-3}{2}+\frac{2x-1}{4}\leq\frac{1-2x}{3}+1 \quad \text{x est l'inconnue}$$

Méthodologie :

- On sépare les termes contenant l'inconnue des termes ne contenant pas l'inconnue.
- On transpose tous les termes contenant l'inconnue dans un membre et tous les autres termes dans l'autre membre.
- On réduit les deux membres
- Si le coefficient de l'inconnue est non nul, on divise par ce nombre les deux membres. Si ce nombre est strictement positif, on conserve le sens de l'inégalité, si ce nombre est strictement négatif, on change le sens de l'inégalité.
- On écrit l'ensemble des solutions en général en utilisant les intervalles

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

Dans notre exemple, il y a des dénominateurs, on peut réduire au même dénominateurs. Ici le dénominateur commun est : 12

$$\frac{6(x-3)}{12}+\frac{3(2x-1)}{12}\leq\frac{4(1-2x)}{12}+\frac{12\times1}{12}$$

On multiplie alors les deux membre par 12. Comme 12 >0 on conserve le même sens de l'inégalité

$$6(x-3)+3(2x-1)\leq 4(1-2x)+12\times1$$

On développe pour séparer les termes

$$6x-18+6x-3\leq 4-8x+12$$

$$6x+6x+8x\leq 4+12+18+3$$

$$20x\leq 37$$

$$x\leq\frac{37}{20}$$

Donc $S=]-\infty;\frac{37}{20}]$

pour l'équation $\frac{x-3}{2}+\frac{2x-1}{4}=\frac{1-2x}{3}+1$ $S=\{\frac{37}{20}\}$

pour l'inéquation $\frac{x-3}{2}+\frac{2x-1}{4}\geq\frac{1-2x}{3}+1$ $S=[\frac{37}{20};+\infty[$

2.2. Exemple 2

Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante :

$$\frac{3x-1}{7}-\frac{x-1}{2}\geq\frac{4x+12}{14}-2 \quad \text{x est l'inconnue}$$

Le dénominateur commun est 14.

$\frac{2(3x-1)}{14}-\frac{7(x-1)}{14}\geq\frac{4x+12}{14}-\frac{14\times2}{14}$

$2(3x-1)-7(x-1)\geq 4x+12-14\times2$

$6x-2-7x+7\geq 4x+12-28$

$6x-7x-4x\geq -28-7+12+2$

$-5x\geq -21$

Comme -5 <0 on a :

$x\leq\frac{-21}{-5}$

$x\leq\frac{21}{5}$ $S=]-\infty;\frac{21}{5}]$

pour l'équation $\frac{3x-1}{7}-\frac{x-1}{2}=\frac{4x+12}{14}-2$ $S=\{\frac{21}{5}\}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

pour l'inéquation $\frac{3x-1}{7}-\frac{x-1}{2}<\frac{4x+12}{14}-2$ $S=]\frac{21}{5};+\infty[$

2.3. Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$2(3x-3)\leq 6x+8$

$6x-6\leq 6x+8$

$0\times x\leq 14$ $\boxed{S=\mathbb{R}}$

pour l'équation $2(3x-3)=6x+8$ $S=\emptyset$

pour l'inéquation $2(3x-3)>6x+8$ $S=\emptyset$

2.4. Système d'inéquations :

Résoudre le système d'inéquations suivants :

$$I\begin{cases}\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}\geq\frac{x-3}{4} & \text{(a)}\\ \frac{x-1}{5}-8<\frac{2x-3}{3}+\frac{3}{5} & \text{(b)}\end{cases}$$

Méthodologie :

- ✔ On résout les deux inéquations et on détermine $S_{(a)}$ et $S_{(b)}$
- ✔ Les solutions communes aux deux inéquations $S_I=S_{(a)}\cap S_{(b)}$

(a) $\frac{6(x+1)}{12}+\frac{4(x+2)}{12}\geq\frac{3(x-3)}{12}$

$6(x+1)+4(x+2)\geq 3(x-3)$

$6x+6+4x+8\geq 3x-9$

$6x+4x-3x\geq -9-8-6$

$7x\geq -23$

$x\geq\frac{-23}{7}$ $S_{(a)}=[-\frac{23}{7};+\infty[$

(b) $\frac{3(x-1)}{15}-\frac{15\times 8}{15}<\frac{5(2x-3)}{15}+\frac{3\times 3}{15}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$3(x-1)-15\times8<5(2x-3)+3\times3$

$3x-3-120<10x-15+9$

$3x-10x<-15+9+120+3$

$-7x<117$ (-7<0)

$x>-\frac{117}{7}$ $S_{(b)}=]-\frac{117}{7};+\infty[$

$$\boxed{S_I=S_{(a)}\cap S_{(b)}=[-\frac{23}{7};+\infty[}$$

2.5. Signe d'un polynome du 1er degré

Un polynome du 1er degré à une inconnue : x est une expression de la forme : mx + p (où m et p sont deux nombres réels fixés avec m non nul).

On peut noter le polynome f(x) = mx + p et f est une fonction affine.

On se propose de déterminer le signe de f(x) sans tracer sa représentation graphique. Pour cela il suffit de résoudre f(x) = 0 , f(x) > 0 et f(x) < 0.

f(x) = 0

mx + p = 0 mx = -p $x=-\frac{p}{m}$ $S=\{-\frac{p}{m}\}$

Si m > 0

f(x) > 0 mx + p > 0 mx > -p $x>-\frac{p}{m}$ $S=]-\frac{p}{m};+\infty[$

f(x) < 0 mx + p < 0 mx < -p $x<-\frac{p}{m}$ $S=]-\infty;-\frac{p}{m}[$

On donne le résultat sous la forme de tableau.

x	$-\infty$		$\frac{-P}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si m < 0

f(x) > 0	mx + p > 0	mx > -p	$x<-\frac{p}{m}$	$S=]-\infty;-\frac{p}{m}[$
f(x) < 0	mx + p < 0	mx < -p	$x>-\frac{p}{m}$	$S=]-\frac{p}{m};+\infty[$

On donne le résultat sous la forme de tableau.

x	$-\infty$		$\frac{-P}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	

3. Fonction affine par morceaux

f est définie sur [-4 ; 6] par :

- ✔ Si $-4\leq x<-1$ f(x) = 2x + 3
- ✔ Si $-1\leq x<3$ f(x) = –3x – 2
- ✔ Si $3\leq x\leq 6$ f(x) = x – 14

f n'est pas une fonction affine mais nous avons partagé l'intervalle : [– 4 ; 6] en 3 intervalles [–4; –1[; [–1; –3[; [3; 6] sur lesquels la fonction est affine.

$[-4;6]=[-4;-1[\cup[-1;3[\cup[3;6]$

On dit que f est une fonction affine par morceaux.

- ✔ Sur l'intervalle [-4 ; -1[. Le coefficient de x est 2>0 donc la fonction est strictement croissante sur [-4 ; -1[, la courbe représentative de f sur cet intervalle est le segment [A B[avec B exclu.

  A(-4 ; - 5) 2(-4) + 3 = -5

  B(-1 ; 1) 2(-1) + 3 = 1

- ✔ Sur l'intervalle [-1 ; 3[. Le coefficient de x est -3<0 donc la fonction est strictement décroissante sur [-1 ; 3[, la courbe représentative de f sur cet intervalle est le segment [C D[avec D exclu.

  C(-1 ; 1) -3(-1) - 2 = 1

  D(3 ; -11) -3(3) - 2 = -11

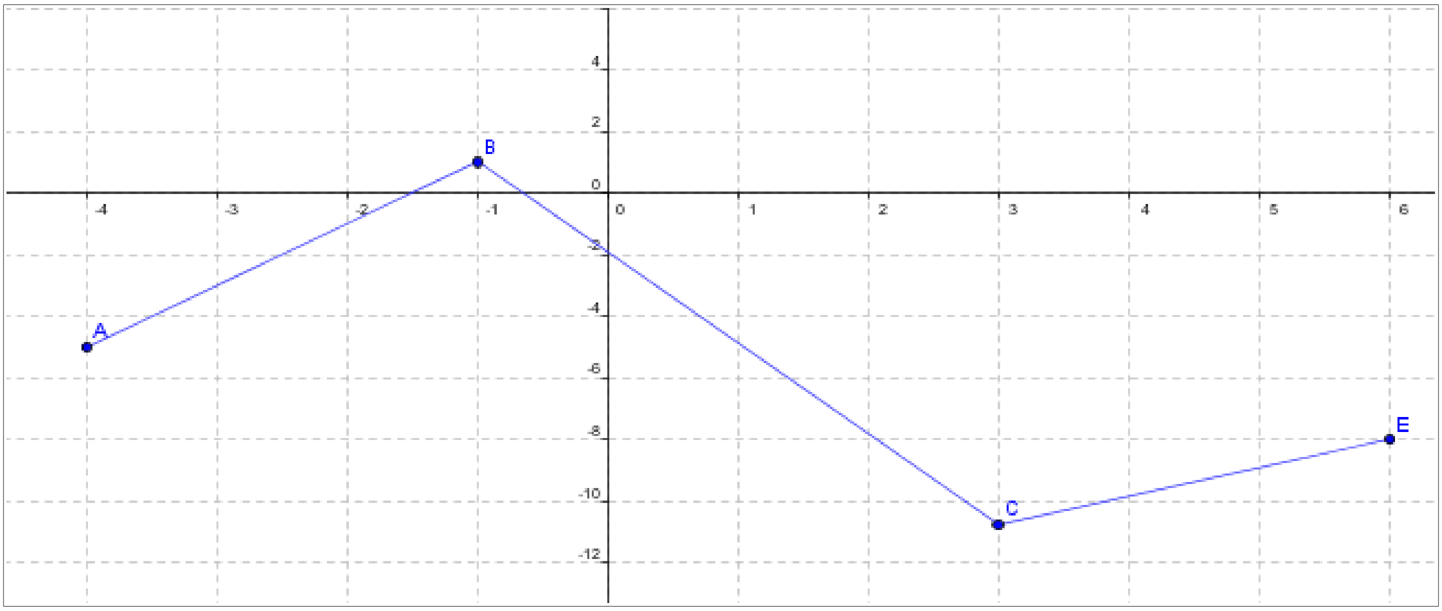
  B = C

- ✔ Sur l'intervalle [3 ; 6]. Le coefficient de x est 1>0 donc la fonction est strictement croissante sur [3 ; 6] , la courbe représentative de f sur cet intervalle est le segment [E F]

  E(3 ; -11) 3 - 14 = -11

  F(6 ; -8) 6 - 14 = -8

x	–4		–1		3		6
$f(x)$	–5	↗	1	↘	–11	↗	–8



Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés