# Fonctions homographiques
# Inéquations rationnelles

## 1. Fonctions homographiques

### 1.1. Exemple 1

$f(x)=-\frac{2}{x}$

**Valeur interdite**

0 est une valeur inerdite.

**Etude de variations de f**

a, b sont deux nombres réels non nuls.

✔ Si $0<a<b$ alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ (-2 < 0)

donc $-\frac{2}{a}<-\frac{2}{b}$ soit $f(a)<f(b)$

f est donc strictement croissante sur $]0;+\infty[$

✔ Si $a<b<0$ alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ (-2 < 0)

donc $-\frac{2}{a}<-\frac{2}{b}$ soit $f(a)<f(b)$

f est donc strictement croissante sur $]-\infty;0[$

**Tableau de variations**

| $x$ | $-\infty$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| *f(x)* | $\nearrow$ | ‖ | $\nearrow$ |

**Tableau de valeurs**

| x | -8 | -4 | -2 | -1 | -0,5 | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

**Remarques**

Pour tout nombre réel non nul x

$$f(-x)=\frac{-2}{-x}=-(\frac{-2}{x})=-f(x)$$

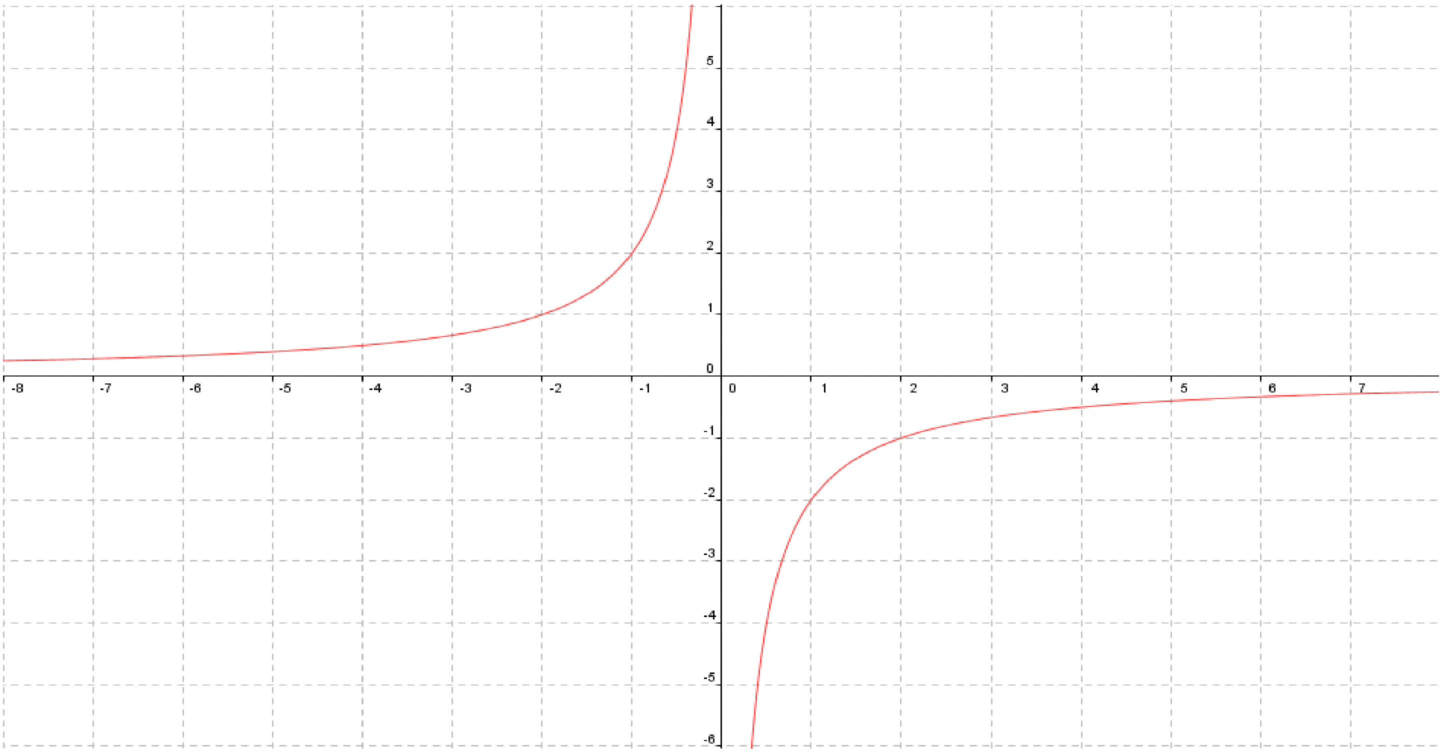
***On dit que f est une fonction impaire.***

***Les points M(x;f(x)) et M'(-x;f(-x)) sont symétriques par rapport à l'origine du repère.***

***Donc l'origine est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.***

***La courbe représentative de f se nomme hyperbole. L'origine est le centre de l'hyperbole.***

**Représentation graphique**




- ✔ Sur $]0;+\infty[$ la courbe est strictement en dessous de l'axe des abscisses (donc f(x) < 0).
- ✔ Sur $]-\infty;0[$ la courbe est strictement au dessus de l'axe des abscisses (donc f(x) > 0).

| $x$ | $-\infty$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | ‖ | - |

## 1.2.Exemple 2

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

**Valeur interdite**

$x-2=0$ donc $x=2$ La valeur interdite est 2

**Etude de variations de f**

a, b sont deux nombres réels distincts de 2.

- ✔ Si $2<a<b$ soit $0<a-2<b-2$

donc $\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}$ soit $f(a) > f(b)$

f est donc strictement décroissante sur $]2\,;+\infty[$

✔ Si $a-2<b-2<0$

donc $\frac{1}{a-2} > \frac{1}{b-2}$ soit $f(a) > f(b)$

f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;2[$

## Tableau de variations

| *x* | $-\infty$ | **2** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| *f(x)* | ↘ | ‖ | ↘ |

## Tableau de valeurs

| x | -6 | -2 | 0 | 1 | 1,5 | 1,75 | 2,25 | 2,5 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -0,175 | -0,25 | -0,5 | -1 | -2 | -4 | 4 | 2 | 1 | 0,5 | 0,25 |

## Représentation graphique

✔ On trace la droite d d'équation x =2.

- ✔ Le centre de l'hyperbole est le point I(2;0)
- ✔ Sur $]2\,;+\infty[$ la courbe est strictement au dessus de l'axe des abscisses (donc f(x) > 0).
- ✔ Sur $]-\infty\,;2[$ la courbe est strictement en dessous de l'axe des abscisses (donc f(x) < 0).

| $x$ | $-\infty$ | **2** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | - | ‖ | + |

## 1.3. Exemple 3

$$f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{x}-1=\frac{1}{2\mathrm{x}}-1$$

**Valeur interdite**

$$x=0$$

La valeur interdite est 0

**Etude de variations de f**

a, b sont deux nombres réels non nuls.

- ✔ Si $0<a<b$ alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ $(\frac{1}{2}>0)$ donc $\frac{\frac{1}{2}}{a}>\frac{\frac{1}{2}}{b}$

  donc $\frac{\frac{1}{2}}{a}-1>\frac{\frac{1}{2}}{b}-1$ soit $f(a)>f(b)$

  f est donc strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$

- ✔ Si $a<b<0$ alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ donc $\frac{\frac{1}{2}}{a}>\frac{\frac{1}{2}}{b}$

  donc $\frac{\frac{1}{2}}{a}-1>\frac{\frac{1}{2}}{b}-1$ soit $f(a)>f(b)$

  f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$

**Tableau de variations**

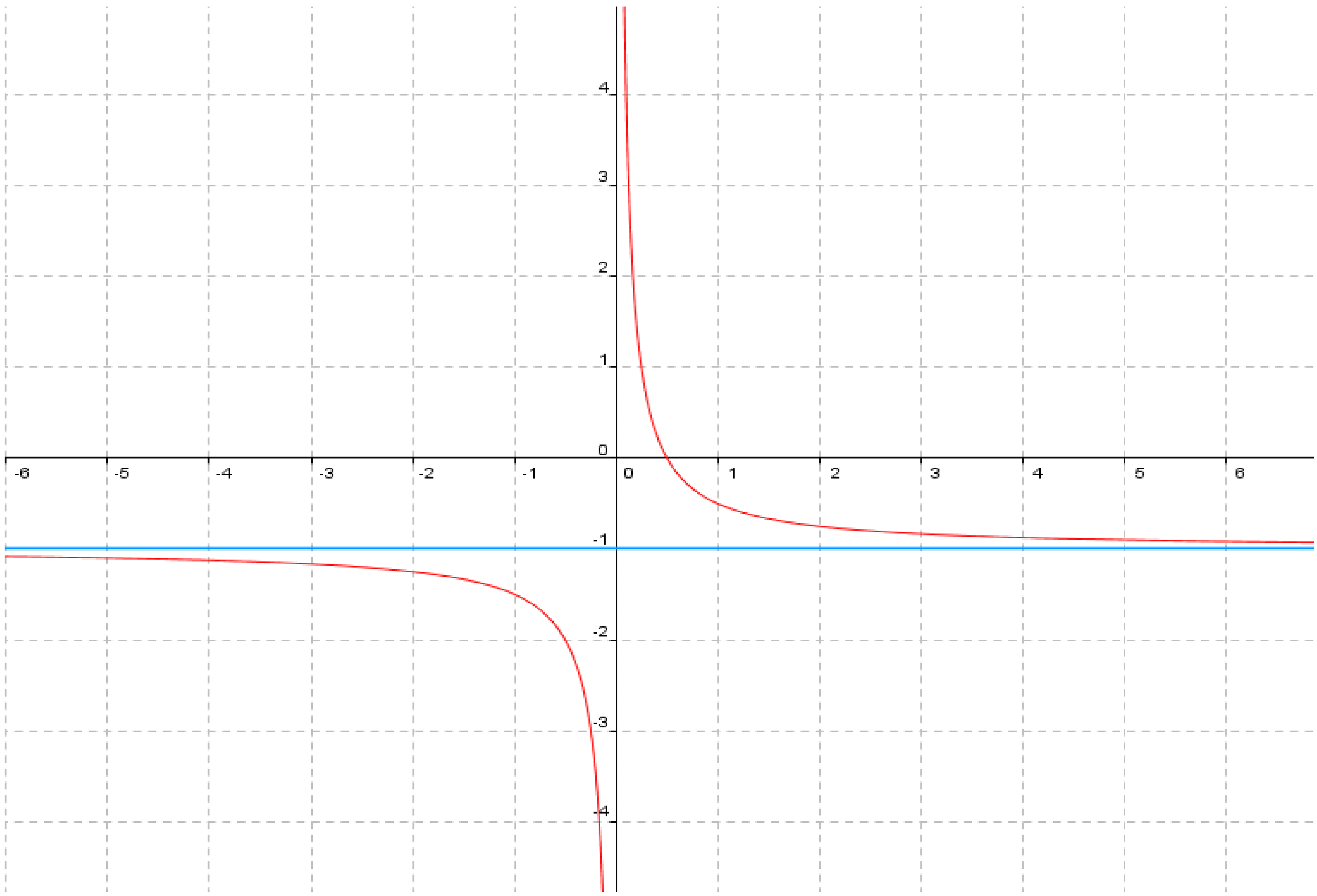
| $x$ | $-\infty$ | **0** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | ‖ | ↘ |

## Tableau de valeurs

| x | -4 | -2 | -1 | -0,5 | -0,25 | | 0,25 | 0,5 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -1,125 | -1,25 | -1,5 | -2 | -3 | | 3 | 0 | -0,5 | -0,75 | -0,875 |

## Représentation graphique




- ✔ On trace la droite d d'équation x = - 1
- ✔ Le centre de l'hyperbole est le point I(0;1)
- ✔ L'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses est : 0,5
- ✔ Sur $]-\infty;0[$ et $]0,5;+\infty[$ sur la courbe est strictement en dessous de l'axe des abscisses (donc f(x) < 0).
- ✔ Sur $]0;0,5[$ la courbe est strictement au dessus de l'axe des abscisses (donc f(x) > 0).

| *x* | $-\infty$ | | **0** | | **0,5** | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *f(x)* | | - | ‖ | + | 0 | - | |

## 1.4. Exemple 4

$$f(x)=\frac{-1}{x+1}+2$$

### Valeur interdite

$x+1=0 \qquad x=-1$

La valeur interdite est -1

### Etude de variations de f

a, b sont deux nombres réels distincts de -1

- ✔ Si $-1<a<b$ alors $0<a+1<b+1$ donc $\frac{1}{a+1}>\frac{1}{b+1}$ $(-1<0)$

  donc $\frac{-1}{a+1}<\frac{-1}{b+1}$ et $\frac{-1}{a+1}+2<\frac{-1}{b+1}+2$ soit $f(a)<f(b)$

  f est donc strictement croissante sur $]-1;+\infty[$

- ✔ Si $a<b<-1$ alors $a+1<b+1<0$ donc $\frac{1}{a+1}>\frac{1}{b+1}$ $(-1<0)$

  donc $\frac{-1}{a+1}<\frac{-1}{b+1}$ et $\frac{-1}{a+1}+2<\frac{-1}{b+1}+2$ soit $f(a)<f(b)$

- ✔ f est donc strictement croissante sur $]-\infty;-1[$

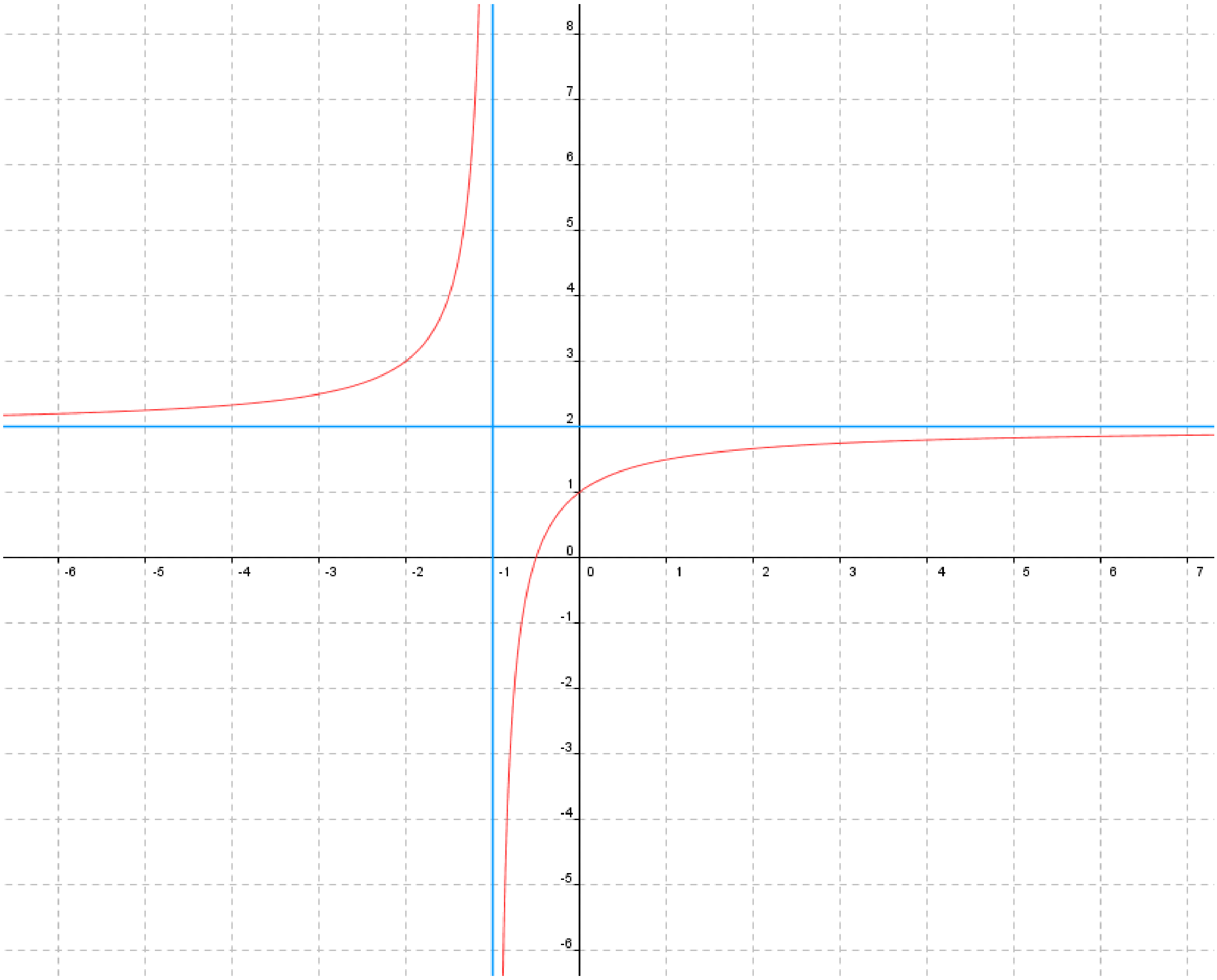
### Tableau de variations

| *x* | $-\infty$ | **-1** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| *f(x)* | $\nearrow$ | \|\| | $\nearrow$ |

### Tableau de valeurs

| x | -5 | -3 | -2 | -1,5 | -1,25 | | -0,75 | -0,5 | 0 | 1 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2,25 | 2,5 | 3 | 4 | 6 | | -2 | 0 | 1 | 1,5 | 1,75 |

## Représentation graphique




- ✔ On trace la droite d d'équation x = - 1 et la droite D d'équation y = 2
- ✔ Le centre de l'hyperbole est le point I(-1;2)
- ✔ L'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses est : -0,5
- ✔ Sur $]-\infty\,;-1[$ et $]-0{,}5\,;+\infty[$ sur la courbe est strictement au dessus de l'axe des abscisses (donc f(x) > 0).
- ✔ Sur $]-1\,;-0{,}5[$ la courbe est strictement en dessous de l'axe des abscisses (donc f(x) < 0).

| $x$ | $-\infty$ | | **-1** | | **-0,5** | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | \|\| | - | 0 | + | |

## 1.5. Exemple 5

$$f(x)=\frac{1}{x-2}-1$$

**Valeur interdite**

$$x-2=0 \qquad x=2$$

La valeur interdite est 2

**Etude de variations de f**

a, b sont deux nombres réels distincts de 2

- ✔ Si $2<a<b$ alors $0<a-2<b-2$ donc $\frac{1}{a-2}>\frac{1}{b-2}$

  donc $\frac{1}{a-2}-1>\frac{1}{b-2}-1$ soit $f(a)>f(b)$

  f est donc strictement décroissante sur $]2\,;+\infty[$

- ✔ Si $a<b<2$ alors $a-2<b-2<0$ donc $\frac{1}{a-2}>\frac{1}{b-2}$

  donc $\frac{1}{a-2}-1>\frac{1}{b-2}-1$ soit $f(a)>f(b)$

  f est donc strictement décroissante sur $]2\,;+\infty[$

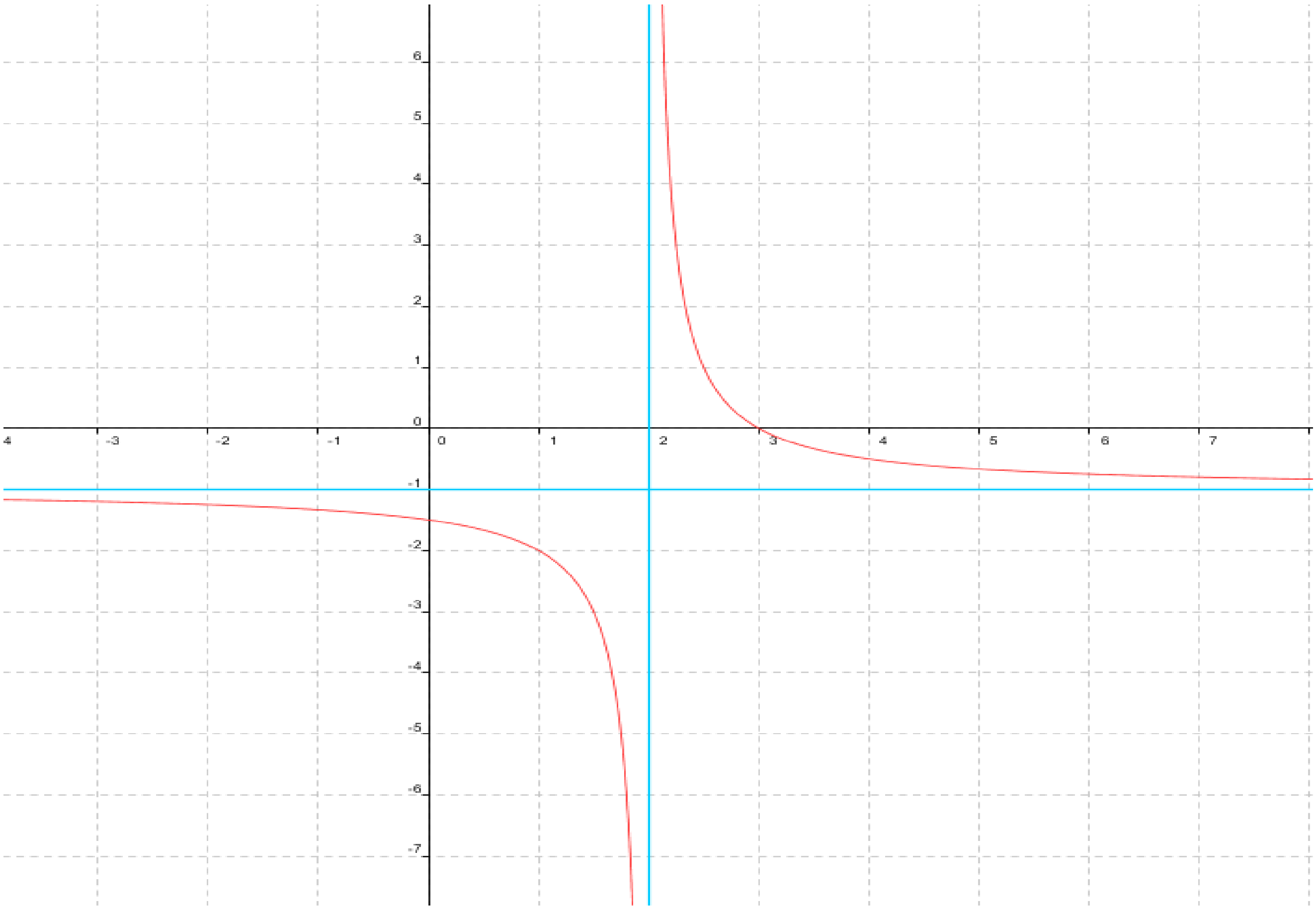
**Tableau de variations**

| $x$ | $-\infty$ | **2** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | ‖ | ↘ |

**Tableau de valeurs**

| x | -2 | 0 | 1 | 1,5 | 1,75 | | 2,25 | 2,5 | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -1,25 | -1,5 | -2 | -3 | -5 | | 3 | 0,5 | 0 | -0,5 | -0,75 |

**Représentation graphique**




- ✔ On trace la droite d d'équation x = - 1 et la droite D d'équation y = 2
- ✔ Le centre de l'hyperbole est le point I(2;-1)
- ✔ L'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses est : 3
- ✔ Sur $]-\infty;2[$ et $]3;+\infty[$ sur la courbe est strictement en dessous de l'axe des abscisses (donc f(x) < 0).
- ✔ Sur $]2;3[$ la courbe est strictement au dessus de l'axe des abscisses (donc f(x) > 0).

| $x$ | $-\infty$ | | **2** | | **3** | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | - | \|\| | + | 0 | - | |

## 2. Equations quotients

## 2. Définition

***Une équation quotient est une equation conenant l'inconnue au dénominateur.***

## 2.2. Consignes

***Pour résoudre une équation quotient,***

- ✔ On détermine la ( ou les ) valeur(s) interdite(s)
- ✔ On transpose tous les termes dans un membre pour obtenir zéro dans l'autre membre.
- ✔ On réduit au même dénominateur, on obtient alors $\frac{N(x)}{D(x)}=0$
- ✔ On résout $N(x)=0$
- ✔ Les solutions de l'équation proposée sont les solutions de l'équation $N(x)=0$ distinctes des valeurs interdites.

## 2.3. Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$$\frac{x^2-16}{(5x-1)(x+3)}=0$$

**Valeurs interdites**

$5x-1=0$ ou $x+3=0$

$x=\frac{1}{5}$ ou $x=-3$

Les valeurs interdites sont $-3 \; et \; \frac{1}{5}$

- ✔ Nous avons directement l'équation sous la forme $\frac{N(x)}{D(x)}=0$

$N(x)=0 \qquad x^2-16=0 \qquad (x-4)(x+4)=0$

$x-4=0$ ou $x+4=0$

$x=4$ ou $x=-4$

- ✔ Les deux solutions de l'équation N(x) = 0 sont distinctes des 2 valeurs interdites.

Donc $S=\{-4;4\}$

## 2.4. Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$$\frac{x^2-9}{(2x-1)(x+3)}=0$$

**Valeurs interdites**

$2x-1=0$ ou $x+3=0$

$x=\frac{1}{2}$ ou $x=-3$

Les valeurs interdites sont $-3\,et\,\frac{1}{2}$

- ✔ Nous avons directement l'équation sous la forme $\frac{N(x)}{D(x)}=0$

$N(x)=0 \qquad x^2-9=0 \qquad (x-3)(x+3)=0$

$x-3=0$ ou $x+3=0$

$x=3$ ou $x=-3$

- ✔ -3 est une valeur interdite donc la solution de l'équation quotient est : 3

Donc $S=\{3\}$

## 2.5. Exemple 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$$\frac{2x^2+x-3}{(x^2-1)}=2$$

**Valeurs interdites**

$x^2-1=0 \qquad (x-1)(x+1)=0$

$x=1$ ou $x=-1$

Les valeurs interdites sont $-1\,et\,1$

- ✔ Mise de l'équation sous la forme $\frac{N(x)}{D(x)}=0$

$$\frac{2x^2+x-3}{(x^2-1)}=2\frac{(x^2-1)}{(x^2-1)}$$

$$\frac{2x^2+x-3-2(x^2-1)}{(x^2-1)}=0 \qquad \text{donc} \qquad \frac{x-1}{(x^2-1)}=0$$

$N(x)=0 \qquad x-1=0$

$x=1$

- ✔ 1 est une valeur interdite donc $S=\emptyset$

## 2.6. Exemple 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$$x-\frac{2}{x+1}=\frac{x^2-2}{x+1}$$

**Valeurs interdites**

$x+1=0 \qquad x=-1$

La valeur interdite est $-1$

- Mise de l'équation sous la forme $\frac{N(x)}{D(x)}=0$

$$x-\frac{2}{x+1}-\frac{x^2-2}{x+1}=0$$

$$\frac{x(x+1)-2-(x^2-2)}{x+1}=0 \quad \text{donc} \quad \frac{x^2+x-2-x^2+2}{x+1}=0$$

$$\frac{x}{x+1}=0$$

$N(x)=0 \qquad x=0$

- 0 n'est pas une valeur interdite donc $S=\{0\}$

## 3. Signe d'un quotient

### 3.1. Consignes

***Pour déterminer le signe du quotient,***

- On détermine la ( ou les ) valeur(s) interdite(s)
- On factorise , si possible, le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs du 1[er] degré.
- Le signe de $\frac{N(x)}{D(x)}$ est le signe de $N(x)\times D(x)$ sur l'ensemble de définition du quotient.
- En général, on donne le résultat sous forme d'un tableau.

### 3.2. Exemple

Déterminer le signe de $F(x)=\frac{x-3}{1-x}$

**Valeurs interdites**

$1-x=0 \qquad x=1$

1 est la valeur interdite.

**Tableau de signe**

$x-3=0 \qquad x=3$

$1<3$

| x | $-\infty$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de x – 3 | | - | | - | 0 | + | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de 1 – x | + | 0 | - | | + |
| Signe de F(x) | - | \|\| | + | 0 | - |

## 4. Inéquations rationnelles (ou inéquations quotients)

### 4.1. Consignes

***Pour résoudre une inéquation rationnelle,***

- ✔ On détermine la ( ou les ) valeur(s) interdite(s)
- ✔ On transpose tous les termes dans un membre (pour avoir zéro dans l'autre membre)
- ✔ On réduit au même dénominateur.
- ✔ On détermine le signe de la fraction rationnelle obtenue
- ✔ On donne l'ensemble des solutions

### 4.2. Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 2$$

**Valeurs interdites**

$x+1=0$ $\qquad$ $x=-1$

-1 est la valeur interdite.

**Tableau de signe**

$$\frac{x-1}{x+1}-2 \geq 0$$

$$\frac{x-1-2(x+1)}{x+1} \geq 0$$

$\dfrac{-x-3}{x+1} \geq 0$ $\qquad$ $x+1=0\,,\, x=-1$ $\qquad$ $-x-3=0\,,\, x=-3$ $\qquad$ $-3<-1$

| x | $-\infty$ | **-3** | | **-1** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de -x – 3 | + | 0 | - | | - |
| Signe de x + 1 | - | | - | 0 | + |
| Signe de F(x) | - | 0 | + | \|\| | - |

$S=[-3\,;-1[$

## 4.4. Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$-1 \leq \frac{2x+3}{x-1} \leq 2$$

$$-1 \leq \frac{2x+3}{x-1} \leq 2 \qquad \Leftrightarrow (I)\begin{cases} -1 \leq \dfrac{2x+3}{x-1} \\ \dfrac{2x+3}{x-1} \leq 2 \end{cases}$$

$$(S_1) : -1 \leq \frac{2x+3}{x-1}$$

**Valeurs interdites**

$$x-1=0 \qquad x=1$$

1 est la valeur interdite.

**Tableau de signe**

$$0 \leq 1+\frac{2x+3}{x-1}$$

$$0 \leq \frac{x-1+2x+3}{x-1}$$

$$0 \leq \frac{3x+2}{x-1} \qquad x-1=0\,,\, x=1 \qquad 3x+2=0\,,\, x=-\frac{2}{3} \qquad -\frac{2}{3}<1$$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | **1** | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de 3x + 2 | | - | 0 | + | | + | |
| Signe de x - 1 | | - | | - | 0 | + | |
| Signe de $(S_1)$ | | + | 0 | - | \|\| | + | |

$$(S_1) = ]-\infty\,;-\frac{2}{3}] \cup ]1\,;+\infty[$$

$(S_2) : \frac{2x+3}{x-1} \leq 2$

### Valeurs interdites

$x-1=0$ $\qquad$ $x=1$

1 est la valeur interdite.

### Tableau de signe

$\frac{2x+3}{x-1}-2 \leq 0$

$\frac{2x+3-2(x-1)}{x-1}$

$\frac{5}{x-1} \leq 0$

5 est strictement positif. Le signe deu quotient est le signe du dnominateur sur l'ensemble de définition.

| x | $-\infty$ | | **1** | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de x - 1 | | - | 0 | + | |
| Signe de $(S_2)$ | | - | \|\| | + | |

$S_2 = ]-\infty ; 1[$

$S_I = S_1 \cap S_2$ $\qquad$ $S_I = ]-\infty ; -\frac{2}{3}]$