Fiche exercices

EXERCICE 1

- ✔ Étudier les variations de la fonction *f* définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=-\frac{3}{2x}$

  Dresser le tableau de variations de *f*

- ✔ Étudier les variations de la fonction *g* définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x-1}$

  Dresser le tableau de variations de *g*

- ✔ Construire les courbes représentatives de f et g dans le même repère orthogonal.
- ✔ Résoudre graphiquement l'équation : $f(x)=g(x)$. Retrouver le résultat par le c

EXERCICE 2

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

- ✔ $f(x)=\frac{3-x}{5x+2}$
- ✔ $g(x)=\frac{x}{3x+1}-4$
- ✔ $h(x)=\frac{1-x}{x-3}+1$

On ne demande pas de tracer les représentations graphiq

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système d'inéquation.

$$-2\leq\frac{1}{x+2}\leq 3$$

Retrouver graphiquement les résultats.

EXERCICE 4

Résoudre par le calcul les inéquations suivantes :

- ✔ $\frac{5-x}{2x+3}\geq 0$
- ✔ $\frac{1}{3x+2}\geq -2$

EXERCICE 5

- ✔ Étudier les variations de la fonction *f* définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2}{x}$

  Dresser le tableau de variations de *f*

- ✔ Étudier les variations de la fonction g définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par $g(x)=\frac{-2}{x+1}$

  Dresser le tableau de variations de g
- ✔ Construire les courbes représentatives de f et g dans le même repère
- ✔ Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$. Retrouver le résultat par le calcul.

EXERCICE 6

- ✔ Étudier les variations de la fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{-1}{x-1}-1$

  Dresser le tableau de variations de f
- ✔ Construire dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f
- ✔ Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction affine g définie par $g(x)=x-4$
- ✔ Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

CORRECTION

EXERCICE 1

✔ Étudier les variations de la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=-\frac{3}{2x}$

La valeur interdite est : 0

a et b sont deux réels non nuls.

- Si $0<a<b$ alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ donc $-\frac{3}{2}a<-\frac{3}{2}b$ soit

  $\boxed{f(a)<f(b)}$

  f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- Si $a<b<0$ alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ donc $-\frac{3}{2}a<-\frac{3}{2}b$ soit

  $\boxed{f(a)<f(b)}$

  f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$

Dresser le tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↗	‖	↗

✔ Étudier les variations de la fonction g définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{x-1}$

La valeur interdite est : 1

a et b sont deux réels distincts de 1.

- Si $1<a<b$ soit $0<a-1<b-1$ alors $\frac{1}{a-1}>\frac{1}{b-1}$

  $\boxed{f(a)>f(b)}$

  f est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$
- Si $a<b<1$ soit $a-1<b-1<0$ alors $\frac{1}{a-1}>\frac{1}{b-1}$

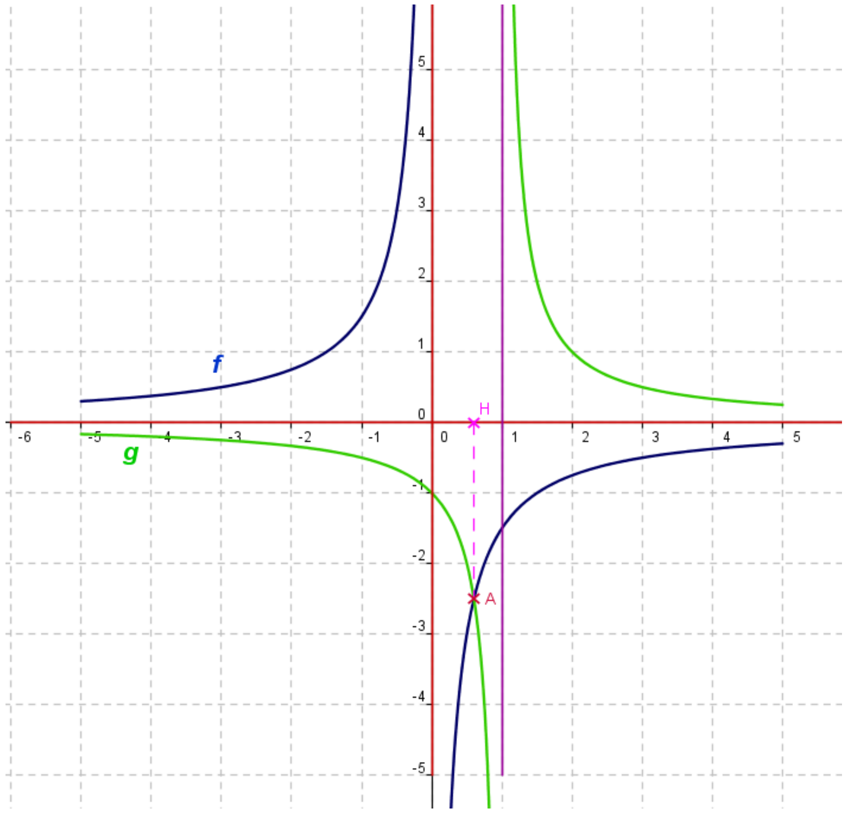
  $\boxed{f(a)>f(b)}$

  f est strictement décroissante sur $]-\infty;1[$

Dresser le tableau de variations de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de g	↘	‖	↘

✔ Construire les courbes représentatives de f et g dans le même repère orthogonal.



✔ Résoudre graphiquement l'équation : $f(x)=g(x)$. Retrouver le résultat par le calcul.

Les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g.

Il y a un seul point d'intersection A d'abscisse 0,6

Donc $\boxed{S=\{0{,}6\}}$

Retrouvons le résultat par le calcul :

$f(x)=g(x)$

$-\frac{3}{2x}=\frac{1}{x-1}$

Les valeurs interdites sont : 0 et 1

$0=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2x}$

$0=\frac{2x}{(x-1)(2x)}+\frac{3(x-1)}{(2x)(x-1)}$

$0=\frac{5x-3}{(x-1)(2x)}$

$5x-3=0$

$5x=3$

$x=\frac{3}{5}=0{,}6$

Comme 0,6 n'est pas une valeur interdite donc $\boxed{S=\{\frac{3}{5}\}}$

EXERCICE 2

Déterminer le signe des fonctions suivantes :

✔ $f(x)=\frac{3-x}{5x+2}$

$3-x=0$

$3=x$

$5x+2=0$

$5x=-2$

$x=-\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{5}<3$

La valeur interdite est : $-\frac{2}{5}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		3		$+\infty$
Signe de $3-x$		+		+	0	-	
Signe de $5x+2$		-		+		+	
Signe de $f(x)$		-	‖	+	0	-	

✔ $g(x)=\frac{x}{3x+1}-4=\frac{x-4(3x+1)}{3x+1}=\frac{-11x-4}{3x+1}$

$-11x-4=0$

$-11x=4$

$x=-\frac{4}{11}$

$3x+1=0$

$3x=-1$

$x=-\frac{1}{3}$

Pour pouvoir comparer $-\frac{4}{11}$ et $-\frac{1}{3}$ on doit comparer $-\frac{12}{33}$ et $-\frac{11}{33}$

$-\frac{12}{33}<-\frac{11}{33}$ donc $-\frac{4}{11}<-\frac{1}{3}$

La valeur interdite est : $-\frac{1}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{11}$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $-11x-4$		+		-		-	
Signe de $3x+1$		-		-	0	+	
Signe de $g(x)$		-	0	+	||	-	

✔ $h(x)=\frac{1-x}{x-3}+1=\frac{1-x+1(x-3)}{x-3}=\frac{-2}{x-3}$

$x-3=0$

$x=3$

La valeur interdite est : 3

Attention le numérateur est égale à -2, donc toujours négatif

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de -2		-		-	
Signe de $x-3$		-		+	
Signe de $h(x)$		+	||	-	

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système d'inéquation.

(I) $-2\leq\frac{1}{x+2}\leq 3$

(I) $-2\leq\frac{1}{x+2}\leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq\frac{1}{x+2} & (1) \\ \frac{1}{x+2}\leq 3 & (2) \end{cases}$

$S_I=S_{(1)}\cap S_{(2)}$

$x+2=0$

$x=-2$

(1) $-2\leq\frac{1}{x+2}$

La valeur interdite est : -2

$0\leq\frac{1}{x+2}+2$

$0\leq\frac{1+2(x+2)}{x+2}$

$0 \leq \frac{2x+5}{x+2}$

$2x+5=0$

$2x=-5$

$x=-\frac{5}{2}$ $\quad$ $-\frac{5}{2}<-2$ $\quad$ $F(x)=\frac{2x+5}{x+2}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		$+\infty$
Signe de $2x+5$		-	0	+		+	
Signe de $x+2$		-		-	0	+	
Signe de $F(x)$		+	0	-	||	+	

$\boxed{S_{(1)}=]-\infty;-\frac{5}{2}]\cup]-2;+\infty[}$

(2) $\quad \frac{1}{x+2} \leq 3$

La valeur interdite est : -2

$\frac{1}{x+2}-3 \leq 0$

$\frac{1-3(x+2)}{x+2} \leq 0$

$\frac{1-3x-6}{x+2} \leq 0$

$\frac{-3x-5}{x+2} \leq 0$

$-3x-5=0$

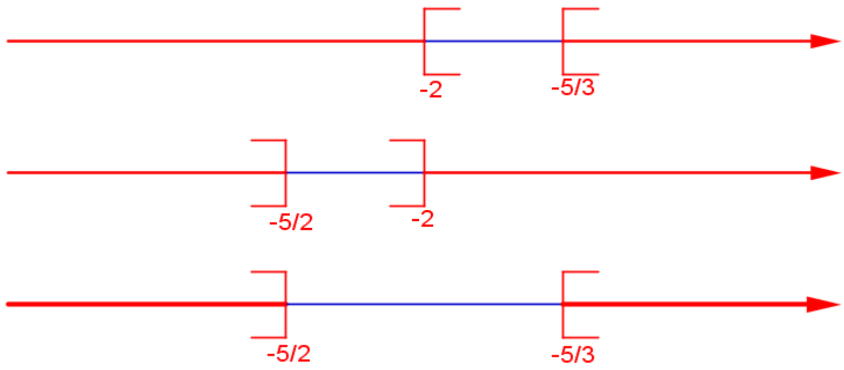
$-3x=5$

$x=-\frac{5}{3}$ $\quad$ $-2<-\frac{5}{3}$ $\quad$ $G(x)=\frac{-3x-5}{x+2}$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x-5$		+		+	0	-	
Signe de $x+2$		-	0	+		+	
Signe de $G(x)$		-	||	+	0	-	

$$\boxed{S_{(2)}=]-\infty;-2[\cup[-\frac{5}{3};+\infty[}$$

$S_I=S_{(1)}\cap S_{(2)}$



$$\boxed{S_{(I)}=]-\infty;-\frac{5}{2}]\cup[-\frac{5}{3};+\infty[}$$

Interprétation graphique

Dans un repère orthogonal, on trace la courbe représentative de la fonction f définie sur
$]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x+2}$

Puis on trace les droites d'équations $y=-2$ et $y=3$

Les solutions de (I) sont les abscisses des points de la courbe représentative de f au dessus de de la droite d'équation $y=-2$ et en dessous de la droite d'équation $y=3$

EXERCICE 4

Résoudre par le calcul les inéquations suivantes :

✔ $\frac{5-x}{2x+3}\geq 0$

$5-x=0$

$\boxed{5=x}$

$2x+3=0$

$2x=-3$

$\boxed{x=-\frac{3}{2}}$

$-\frac{3}{2}<5$ $F(x)=\frac{5-x}{2x+3}$

La valeur interdite est : $-\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
Signe de $5-x$		$+$		$+$		-	
Signe de $2x+3$		-		$+$		$+$	
Signe de $F(x)$		-	||	$+$	0	-	

$$\boxed{S=]-\frac{3}{2};5]}$$

✔ $\frac{1}{3x+2}\geq -2$

$\frac{1}{3x+2}+2\geq 0$

$\frac{1}{3x+2}+\frac{2(3x+2)}{3x+2}\geq 0$

$\frac{6x+5}{3x+2}\geq 0$

$6x+5=0$ $\qquad$ $3x+2=0$

$6x=-5$ $\qquad$ $3x=-2$

$x=-\frac{5}{6}$ $\qquad$ $x=-\frac{2}{3}$

$-\frac{5}{6}<-\frac{2}{3}$ $\qquad$ $G(x)=\frac{6x+5}{3x+2}$

La valeur interdite est : $-\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $6x+5$		-	0	$+$		$+$	
Signe de $3x+2$		-		-	0	$+$	
Signe de $F(x)$		$+$	0	-	||	$+$	

$$\boxed{S=]-\infty;-\frac{5}{6}]\cup]-\frac{2}{3};+\infty[}$$

EXERCICE 5

✔ Étudier les variations de la fonction *f* définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x}$

La valeur interdite est 0.

a et b sont deux nombres réels non nuls.

- Si $0<a<b$ alors $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ donc $\dfrac{2}{a}>\dfrac{2}{b}$ et $f(a)>f(b)$

  f est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$
- Si $a<b<0$ alors $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ donc $\dfrac{2}{a}>\dfrac{2}{b}$ et $f(a)>f(b)$

  f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$

Dresser le tableau de variations de *f*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	||	$\searrow$	

✔ Étudier les variations de la fonction *g* définie sur $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{-2}{x+1}$

La valeur interdite est -1.
a et b sont deux nombres réels distincts de -1

- Si $-1<a<b$ soit $0<a+1<b+1$ alors $\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1}$ donc $\dfrac{-2}{a+1}<\dfrac{-2}{b+1}$ et $f(a)<f(b)$

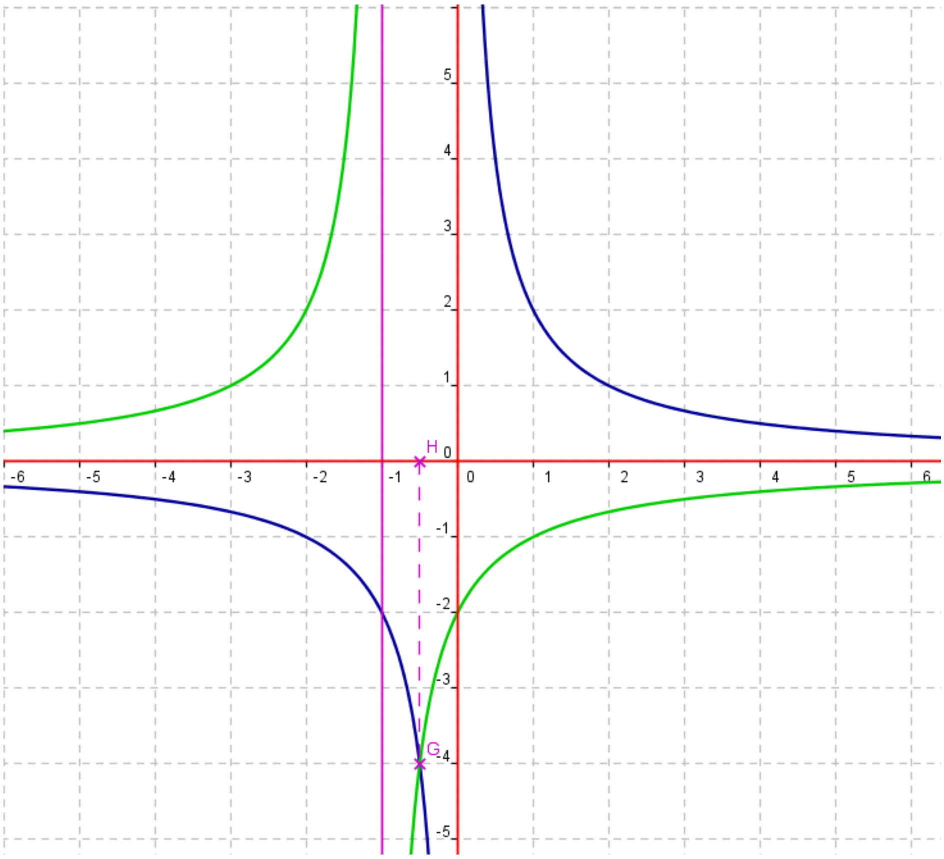
  f est strictement croissante sur $]-1\,;+\infty[$
- Si $a<b<-1$ soit $a+1<b+1<0$ alors $\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1}$ donc $\dfrac{-2}{a+1}<\dfrac{-2}{b+1}$ et $f(a)<f(b)$

  f est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1[$

Dresser le tableau de variations de *g*

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variations de g		$\nearrow$	||	$\nearrow$	

✔ Construire les courbes représentatives de *f* et *g* dans le même repère



✔ Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$. Retrouver le résultat par le calcul.

Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

Il y a un point d'intersection G d'abscisse : $-\frac{1}{2}$

$\boxed{S=\{-\frac{1}{2}\}}$

$f(x)=g(x)$

$\frac{2}{x}=\frac{-2}{x+1}$

$\frac{2}{x}+\frac{2}{x+1}=0$

$\frac{2(x+1)+2(x)}{x(x+1)}=0$

$2(x+1)+2(x)=0$

$4x+2=0$

$4x=-2$

$x=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$ n'est pas une solution interdite.

EXERCICE 6

✔ Étudier les variations de la fonction *f* définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{-1}{x-1}-1$

la valeur interdite est : 1

a et b sont deux nombres réels distincts de 1

- Si $1<a<b$ soit $0<a-1<b-1$ alors $\dfrac{1}{a-1}>\dfrac{1}{b-1}$ donc $\dfrac{-1}{a-1}<\dfrac{-1}{b-1}$ soit $\dfrac{-1}{a-1}-1<\dfrac{-1}{b-1}-1$ et $f(a)<f(b)$

  f est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

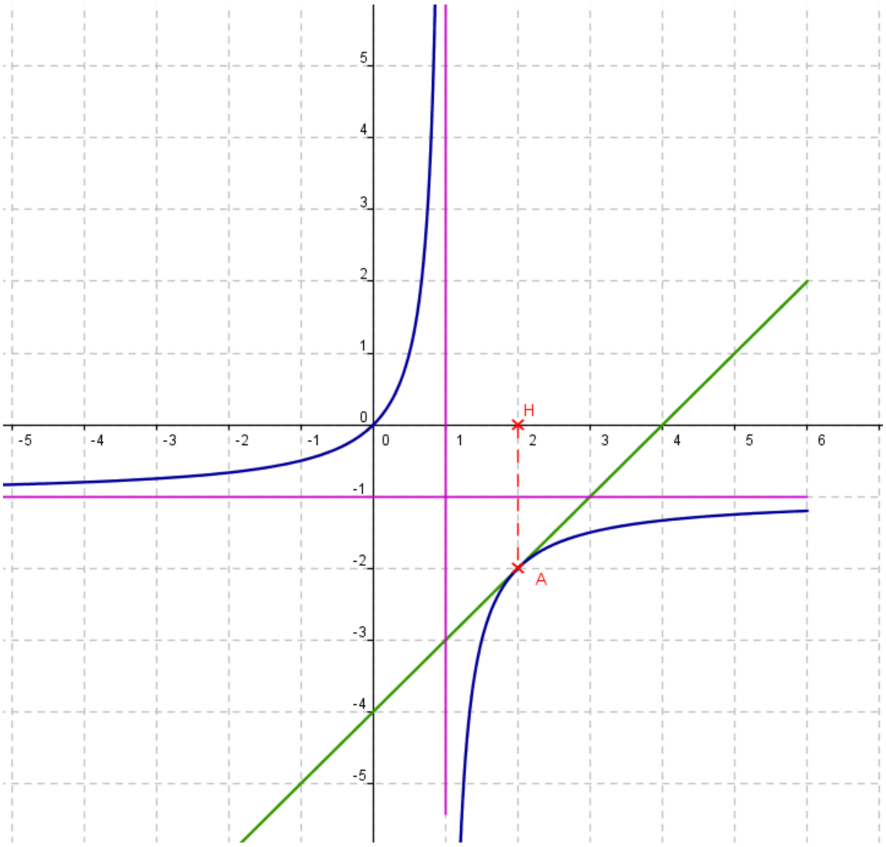
- Si $a<b<1$ soit $a-1<b-1<0$ alors $\dfrac{1}{a-1}>\dfrac{1}{b-1}$ donc $\dfrac{-1}{a-1}<\dfrac{-1}{b-1}$ soit $\dfrac{-1}{a-1}-1<\dfrac{-1}{b-1}-1$ et $f(a)<f(b)$

  f est strictement croissante sur $]-\infty;1[$

Dresser le tableau de variations de *g*

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f	↗	‖	↗

✔ Construire dans un repère orthogonal, la courbe représentative de *f*



✔ Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction affine *g* définie par la courbe représentative de g est une droite. C'est la droite passant par les points de coordonnées (4;0) et (0; -4)

✔ Calculer les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ y=g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{x-1}-1=x-4 & (1) \\ y=x-4 & (2) \end{cases}$$

(1) : $\dfrac{-1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x-1}=\dfrac{(x-4)(x-1)}{x-1}$

la valeur interdite : 1

$-1-(x-1)=(x-4)(x-1)$

$-1-x+1=x^2-4x-x+4$

$0=x^2-4x+4$

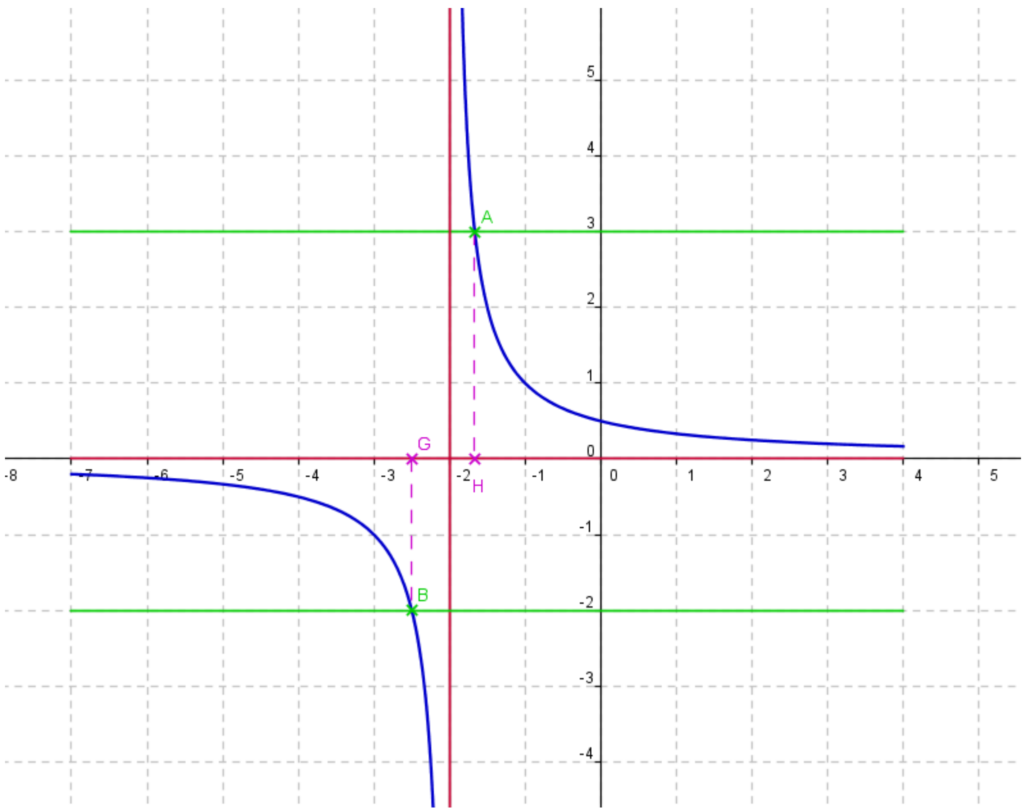
$(x-2)^2=0$

$x=2$

2 n'est pas une valeur interdite

$g(2)=-2$

Les courbes ont un point commun $\boxed{G(2;-2)}$



On obtient $\boxed{S_{(I)}=]-\infty;-2,5]\cup[-1,7;+\infty[}$