

Fonctions de référence

1. Fonction carré

p2

2. Fonction inverse

p4

1. Fonction carré

1.1. Introduction

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

f est définie sur $\mathbb{R}$

1.2. Sens de variation de la fonction carré

Etude de variations de f

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. On suppose $a < b$ et pour comparer $f(a)$ et $f(b)$, on détermine le signe de $f(b) - f(a)$.

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

$b - a > 0$ mais $(b + a)$ n'a pas le même signe pour toutes les valeurs de a et de b (telles que $a < b$).

Par exemple :

$$a = -3 \text{ et } b = 2 \quad a + b = -1 < 0 \quad f(2) - f(-3) < 0$$

$$a = -2 \text{ et } b = 3 \quad a + b = 1 > 0 \quad f(3) - f(-2) > 0$$

f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ et f n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$. On dit que **f n'est pas monotone** sur $\mathbb{R}$

On veut partager $\mathbb{R}$ en réunion d'intervalles sur lesquels la fonction est soit croissante soit décroissante

RAPPEL :

On rappelle que la somme de

- ✓ deux nombres positifs est un nombre positif
- ✓ deux nombres négatifs est un nombre négatif

Donc

- ✓ Si $a \in [0 ; +\infty[; b \in [0 ; +\infty[$ et $a < b$ ($0 \leq a < b$) alors

$$f(b) - f(a) = (b - a)(b + a) > 0 \text{ soit } f(a) < f(b)$$

f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

- ✓ Si $a \in]-\infty ; 0] ; b \in]-\infty ; 0]$ et $a < b$ ($a < b \leq 0$) alors

$$f(b) - f(a) = (b - a)(b + a) < 0 \text{ soit } f(a) > f(b)$$

f est donc strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$			

$f(0) = 0$, pour tout x réel, $x^2 \geq 0$, donc $f(0) = 0$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

A RETENIR :

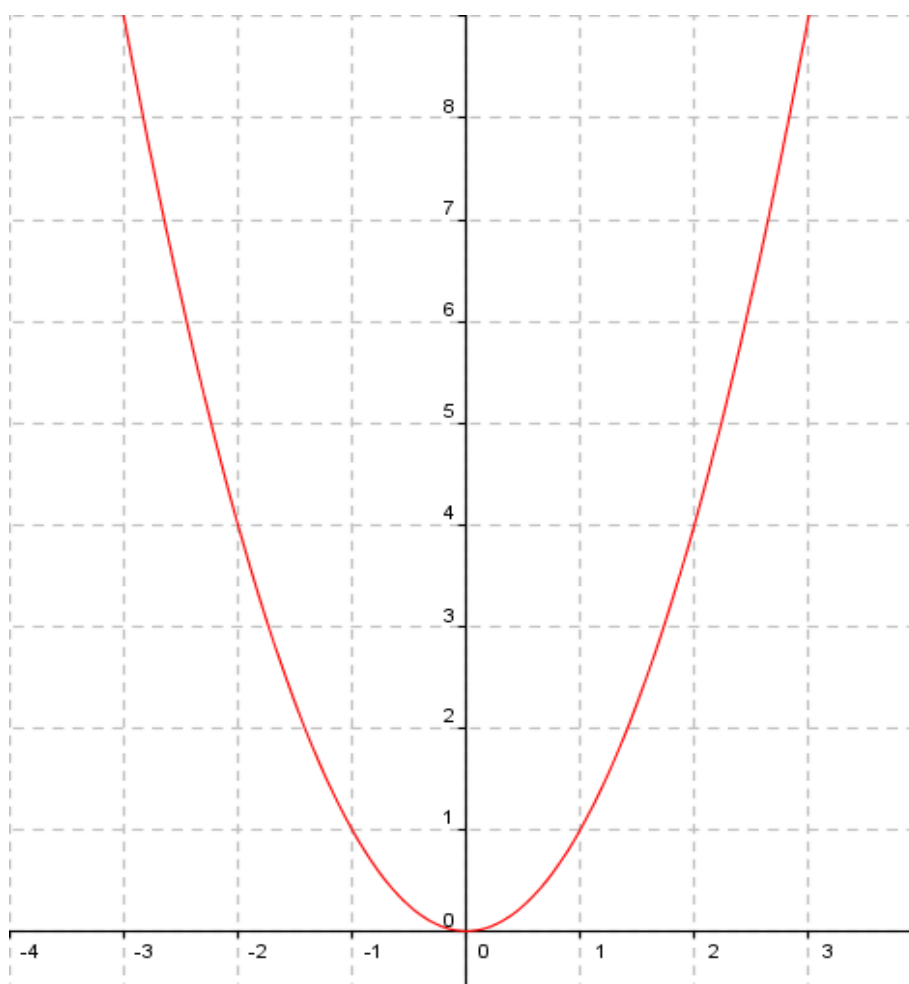
$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

- ✓ Si $(0 \leq a < b)$ alors $a^2 < b^2$
- ✓ Si $(a < b \leq 0)$ alors $a^2 > b^2$

1.3. Courbe représentative de la fonction carré

On choisit un repère orthogonal.

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
f(x)	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9



1.4. Remarques

- ✓ La courbe représentative de f se nomme **parabole**.
- ✓ Le point $O(0;0)$ est le sommet de la parabole.
- ✓ On a pour tout nombre réel x $(-x)^2 = x^2$ soit $f(-x) = f(x)$: **on dit que f est paire**

- ✓ Les points $M(x;f(x))$ et $M'(-x;f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe (yy') . **L'axe (yy') est un axe de symétrie de la courbe représentative de f**
- ✓ En général $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$ soit $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$. f n'est pas une fonction linéaire. On notera que le tableau de valeurs donné n'est pas un tableau de proportionnalité.

2. Fonction inverse

2.1. Introduction

$$\begin{array}{ccc} f :]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

0 est une valeur interdite pour la fonction f

2.2. Sens de variation de la fonction inverse

Pour la fonction inverse on doit étudier les variations sur $]0; +\infty[$ et sur $] -\infty; 0[$

- ✓ Si $a \in]0; +\infty[$ et $b \in]0; +\infty[$ et $a < b$ ($0 < a < b$) alors $f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = \frac{-(b-a)}{ab}$

* Le produit de deux nombres strictement positifs est un nombre strictement positif

$$* -(b-a) < 0$$

Donc $f(b) - f(a) < 0$ soit $f(a) > f(b)$

f est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

- ✓ Si $a \in]-\infty; 0[$ et $b \in]-\infty; 0[$ et $a < b$ ($a < b < 0$) alors $f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = \frac{-(b-a)}{ab}$

* Le produit de deux nombres strictement négatifs est un nombre strictement positif

$$* -(b-a) < 0$$

Donc $f(b) - f(a) < 0$ soit $f(a) > f(b)$

f est donc strictement décroissante sur $] -\infty; 0[$

ATTENTION :

Il ne faut pas dire que f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
car $a = -1$ et $b = 1$ $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$ donc $f(a) < f(b)$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

A RETENIR :

$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$

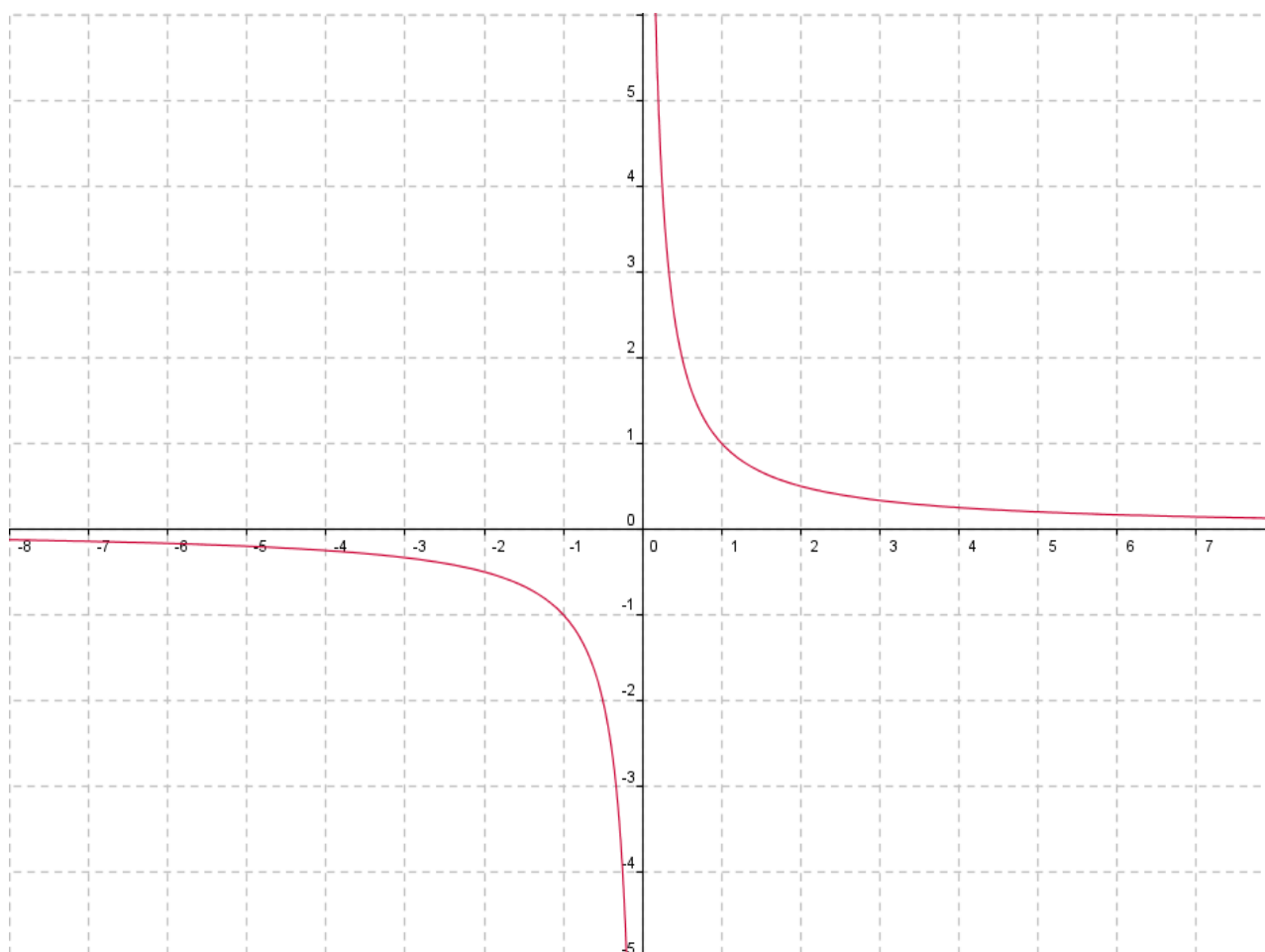
✓ Si $(0 < a < b)$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

✓ Si $(a < b < 0)$ alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

2.3. Courbe représentative de la fonction inverse

On choisit un repère orthogonal.

x	-8	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	4	8
f(x)	-0,125	-0,25	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	0,25	0,125



2.4. Remarques

✓ La courbe représentative de f se nomme **hyperbole**.

✓ On a pour tout nombre réel x $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ soit $f(-x) = -f(x)$: **on dit que f est impaire**

- ✓ Les points $M(x;f(x))$ et $M'(-x;f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine. **L'origine est le centre de symétrie de la courbe représentative de f**
- ✓ En général $f(a+b) \neq f(a) + f(b)$ soit $\frac{1}{a+b} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. f n'est pas une fonction linéaire.