Fonctions polynomes du second degré
Inéquations du second degré

1. Rappels sur les calculs algébriques

1.1. Distributivité et Identités remarquables

RAPPEL :

a, b, c, d sont des nombres réels.

- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

1.2. Développement

Exemple 1

On souhaite développer $A = (2x - 3)(4x + 5) - 16(2x - 1)$

$A = 8x^2 - 12x + 10x - 15 - 32x + 16$

$A = 8x^2 - 34x + 1$

Utilisation de géogébra pour le développement

Géogébra est un logiciel de géométrie plane sous licence libre téléchargeable gratuitement à l'adresse suivante : http://www.geogebra.org/download/install.htm

Il permet aussi de réaliser du calcul algébrique.

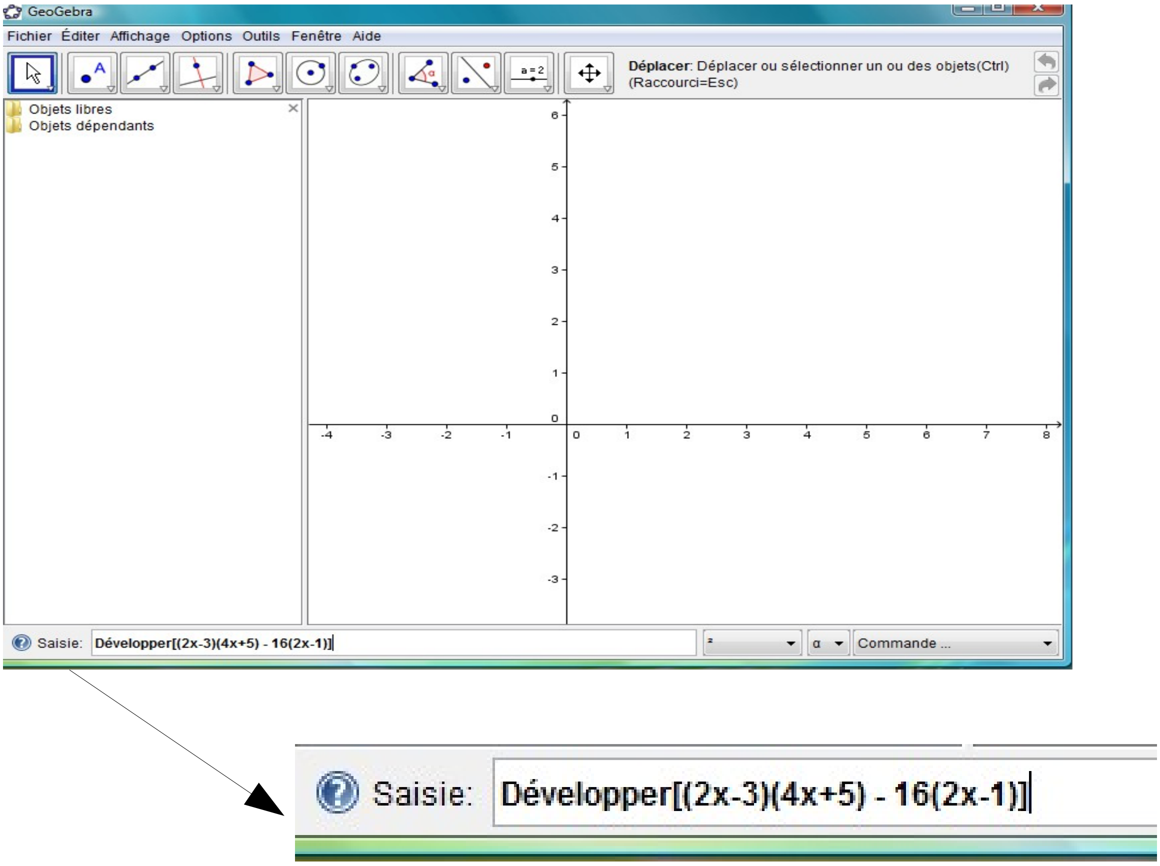
On va donc se servir de géogébra pour vérifier le résultat de notre développement de A

Etape 1 : Ouverture du logiciel :

On ouvre le logiciel en double cliquant sur l'icone

Etape 2 : Saisie de l'expression à développer.

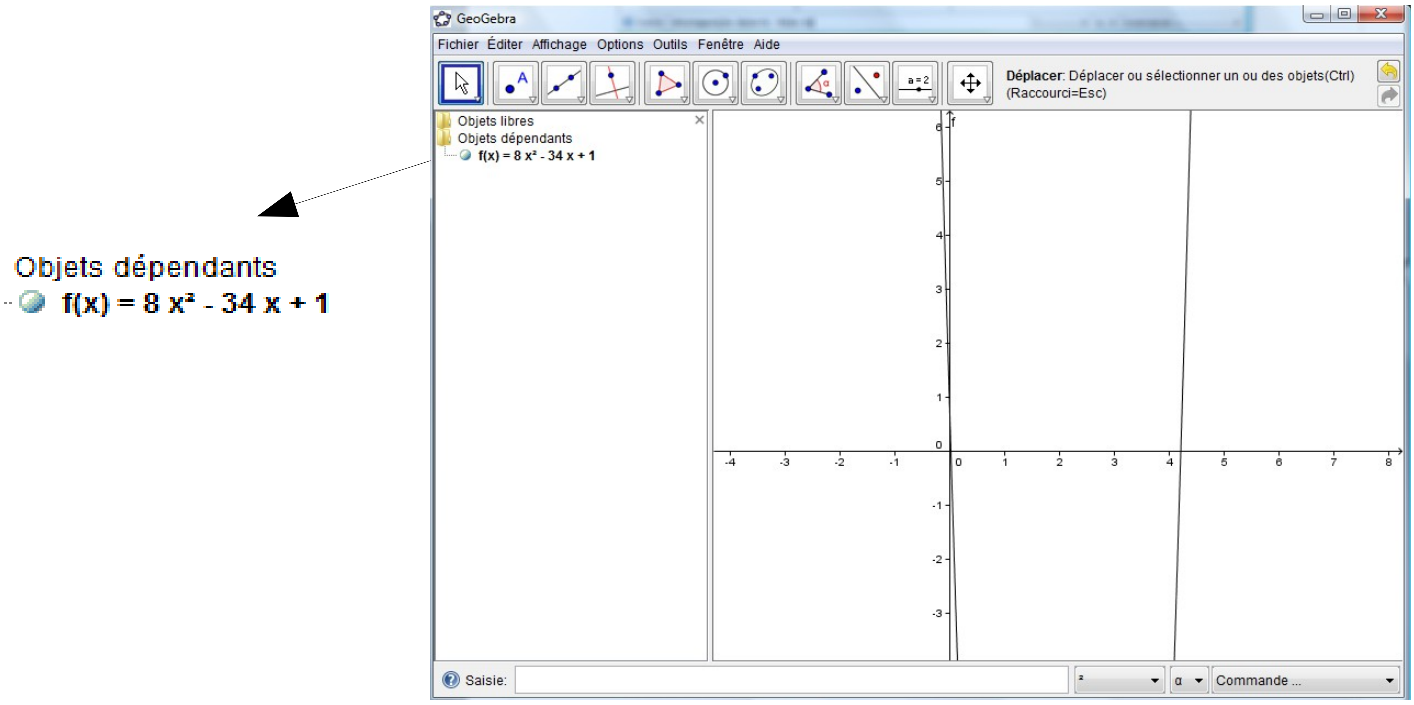
On saisit dans la barre de saisie en bas l'expression : Développer[(2x – 3)(4x + 5) – 16(2x – 1)]



Appuyer ensuite sur la touche Entrée

Etape 3 : Visualisation du résultat

Il suffit ensuite de lire dans la colonne de gauche le résultat du développement.



Exemple 2

On souhaite développer réduire et ordonner $B = (5x - 12)(3 - 2x) - (2x + 3)(1 - x)$

$B = 15x - 36 - 10x^2 + 24x - 2x - 3 + 2x^2 + 3x$

$B = - 8x^2 + 40x - 39$

En utilisant géogébra on trouve bien le même résultat.

1.3.Factorisation

Exemple 1

On souhaite factoriser $C = (2x+1)(x - 1) + 4x^2 - 1$

$C = (2x + 1)(x - 1) + (2x - 1)(2x + 1)$

$C = (2x + 1) [(x - 1) + (2x - 1)]$

$C = (2x + 1) (3x - 2)$

Utilisation de géogébra pour la factorisation

Pour factoriser une expression dans géogébra, il suffit de saisir dans la zone de saisie :

Factoriser[(2x+1)(x – 1) + 4x^2 – 1] (Attention x^2 se note x^2 dans géogébra).

on obtient alors :

$$6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (2\times3)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(3x-3\times\frac{2}{3}\right)\left(2x+2\times\frac{1}{2}\right)=(2x+1)(3x-2)$$

On obtient ainsi le résultat précédent.

Remarque :

Dans le cas où le polynôme donné n'est pas factorisable, alors géogébra donne la forme développé du polynôme dans la barre de gauche.

Exemple 2

Factoriser $D = 4x^2 - 8x + 4 + (3x - 3)(x + 3)$

$D = (2x - 2)^2 + 3(x - 1)(x + 3)$

$D = 4(x - 1)^2 + 3(x - 1)(x + 3)$

$D = (x - 1)[4(x - 1) + 3(x + 3)]$

$D = (x - 1)(7x + 5)$

En utilisant géogébra on trouve $f(x)=(7x-7)\left(x+\frac{5}{7}\right)$

1.4. Equation produit

RAPPEL :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$: (2x – 1)(x – 3) = 0

2x – 1 = 0 ou x – 3 = 0

$x=\frac{1}{2}$ ou x = 3 $S=\{\frac{1}{2};3\}$

1.4. Transformation d'un polynome du 2ème degré

Exemple 1

$P(x) = x^2 + 6x - 3$

- ✔ On considère les 2 premiers termes comme le début du développement d'un carré d'une somme (ou d'un différence).

  $x^2+6x+...=(......)^2$

  $x^2+6x+9=(x+3)^2$

(Si le 1er terme de la somme ou de la différence) est x et le double produit : 6x alors le 2ième terme est $\frac{6}{2}=3$

- ✔ On peut donc écrire :

  $x^2+6x=(x+3)^2-9$ et

  $P(x)=(x+3)^2-9-3$

  $P(x)=(x+3)^2-12$

Ce n'est ni la forme développée, ni la forme factorisée du polynome, mais cette écriture permettra de déterminer facilement le minimum de P et les variations de P

Exemple 2

$P(x) = -2x^2 + 3x + 1$

- ✔ On met en facteur le coefficient de x. Dans notre exemple on divise tous les coefficients par - 2

  $P(x)=-2[x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}]$

- ✔ On considère maintenant $x^2-\frac{3}{2}x$

  $x^2-\frac{3}{2}x+(\frac{3}{4})^2=(x-\frac{3}{4})^2$

- ✔ On peut donc écrire :

  $x^2-\frac{3}{2}x=(x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}$

  $P(x)=-2[(x-\frac{3}{4})^2-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}]$

$$P(x)=-2[(x-\frac{3}{4})^2-\frac{17}{16}]$$

$$P(x)=-2(x-\frac{3}{4})^2+\frac{17}{8}$$

2. Fonctions polynomes du second degré

2.1. Exemple 1

Etude de variations de f

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)=-\frac{1}{2}x^2$$

f est définie sur $\mathbb{R}$, a, b sont deux nombres réels.

- ✔ Si $0 \leq a < b$ $alors\, a^2 < b^2$ $-\frac{1}{2} < 0$

  donc $-\frac{1}{2}a^2 > -\frac{1}{2}b^2\ soit\ f(a) > f(b)$ f est donc strictement décroissante sur $[0 + \infty[$

- ✔ Si $a < b \leq 0$ $alors\, a^2 > b^2$

  donc $-\frac{1}{2}a^2 < -\frac{1}{2}b^2\ soit\ f(a) < f(b)$ f est donc strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$

Tableau de variations

x	$-\infty$	**0**	$+\infty$
f(x)	↗	0	↘

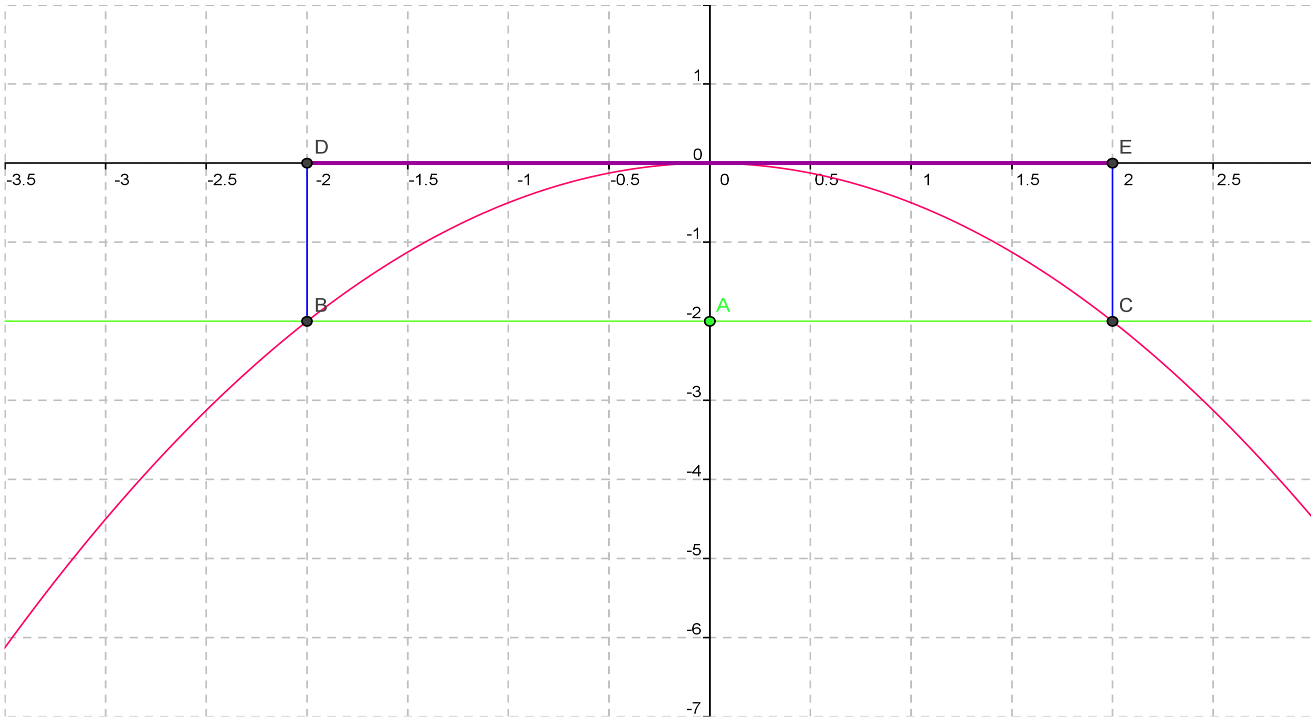
f(0) est le maximum de f sur $\mathbb{R}$

Tableau de valeurs

x	-4	-2	-1	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	1	2	4
f(x)	-8	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{32}$	0	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

La courbe représentative de f est une parabole de sommet S(0;f(0)). L'axe de symétrie est (y'y).

Représentation graphique



<u>Résoudre graphiquement : f(x) = - 2</u>

d est la droite d'équation : y = -2

Les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de d sont -2 et 2

$S=\{-2;2\}$

<u>Résoudre par le calcul : f(x) = - 2</u>

$$-\frac{1}{2}x^2=-2$$

$-\frac{1}{2}x^2+2=\frac{-x^2+4}{2}=\frac{(2-x)(2+x)}{2}=0$ Donc 2 – x = 0 ou 2 + x =0

x =2 ou x = -2

$S=\{-2;2\}$

<u>Résoudre graphiquement : f(x) ≥ - 2</u>

La courbe f est au dessus de d sur l'intervalle [-2;2]

2.2. Exemple 2

Etude de variations de f

$$f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)=2x^2-3$$

f est définie sur ℝ, a, b sont deux nombres réels.

✔ Si $0\leq a<b$ $alors\ a^2<b^2$ $2>0$

donc $2a^2<2b^2 et\ 2a^2-3<2b^2-3\ soit\ f(a)<f(b)$ f est donc strictement croissante sur $[0+\infty[$

✔ Si $a<b\leq 0$ $alors\, a^2>b^2$

donc $2a^2>2b^2 \, et \, 2a^2-3>2b^2-3 \, soit \, f(a)>f(b)$ f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

Tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		-3	

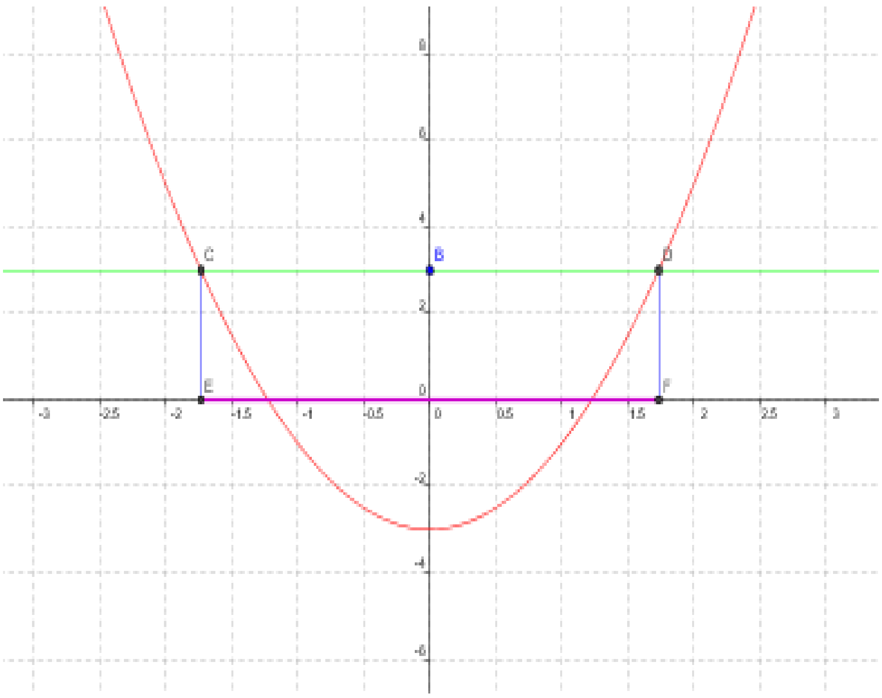
f(0) est le minimum de f sur R

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
f(x)	15	5	-1	-2,5	-3	-2,5	-1	5	15

La courbe représentative de f est une parabole de sommet S(0;-3). L'axe de symétrie est (y'y).

Représentation graphique



<u>Résoudre graphiquement : f(x) =3</u>

d est la droite d'équation : y = 3

Les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et de d sont -1,7 et 1,7 (valeurs approchées)

$S=\{-1,7;1,7\}$

<u>Résoudre par le calcul : f(x) = 3</u>

$2x^2-3=3$

$2x^2=6 \qquad x^2=3 \qquad x^2-3=0 \qquad (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$

$(x-\sqrt{3})=0$ ou $(x+\sqrt{3})=0$

$S=\{-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}\}$

Résoudre graphiquement : f(x) <3

La courbe f est strictement en dessous de d sur l'intervalle $]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$

$S=]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$

2.3.Exemple 3

Etude de variations de f

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)=x^2-2x-3$$

f est définie sur $\mathbb{R}$, a, b sont deux nombres réels.

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

$x^2-2x=(x-1)^2-1$

$f(x)=(x-1)^2-1-3=(x-1)^2-4$

- ✔ Si $1\leq a<b$ $soit\ 0\leq a-1<b-1\ alors\ (a-1)^2<(b-1)^2\ et\ (a-1)^2-4<(b-1)^2-4$
  donc $f(a)<f(b)$ f est donc strictement croissante sur $[1+\infty[$
- ✔ Si $a<b\leq 1$ $alors\ a-1<b-1\leq 0\ alors\ (a-1)^2>(b-1)^2\ et\ (a-1)^2-4>(b-1)^2-4$
  donc $f(a)>f(b)$ f est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$

Tableau de variations

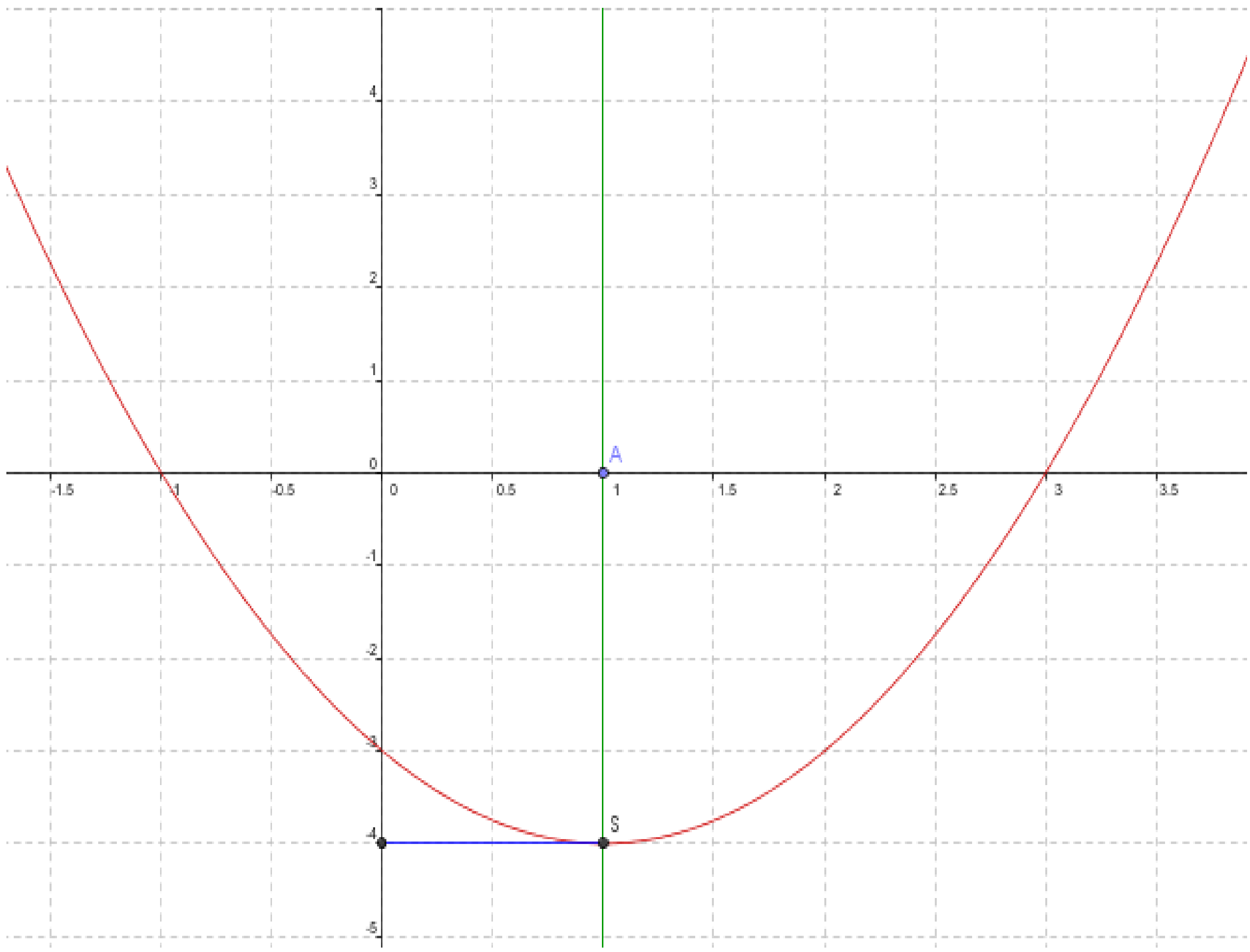
x	$-\infty$	**1**	$+\infty$
f(x)	$\searrow$	-4	$\nearrow$

f(1) est le minimum de f sur $\mathbb{R}$

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	5	0	-3	-4	3	0	5

Représentation graphique



La courbe représentative de f est une parabole de sommet S(1;-4). L'axe de symétrie est la droite d'équation x=1

2.4.Exemple 4

Etude de variations de f

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = -x^2 + 4x$$

f est définie sur $\mathbb{R}$, a, b sont deux nombres réels.

$$-x^2+4x = -[x^2-4x]$$

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

$$f(x)=-[(x-2)^2-4]=-(x-2)^2+4$$

- ✔ Si $2 \leq a < b$ $soit\, 0 \leq a-2 < b-2\, alors\, (a-2)^2 < (b-2)^2\, et -(a-1)^2 > -(b-1)^2$

  $-(a-2)^2+4 > -(b-2)^2+4$

  donc $f(a) > f(b)$ f est donc strictement décroissante sur $[2+\infty[$
- ✔ Si $a < b \leq 2$ $alors\, a-2 < b-2 \leq 0\, alors (a-2)^2 > (b-2)^2\, et -(a-2)^2 < -(b-2)^2$

$$-(a-2)^2+4<-(b-2)^2+4$$

donc $f(a)<f(b)$ f est donc strictement croissante sur $]-\infty;2]$

Tableau de variations

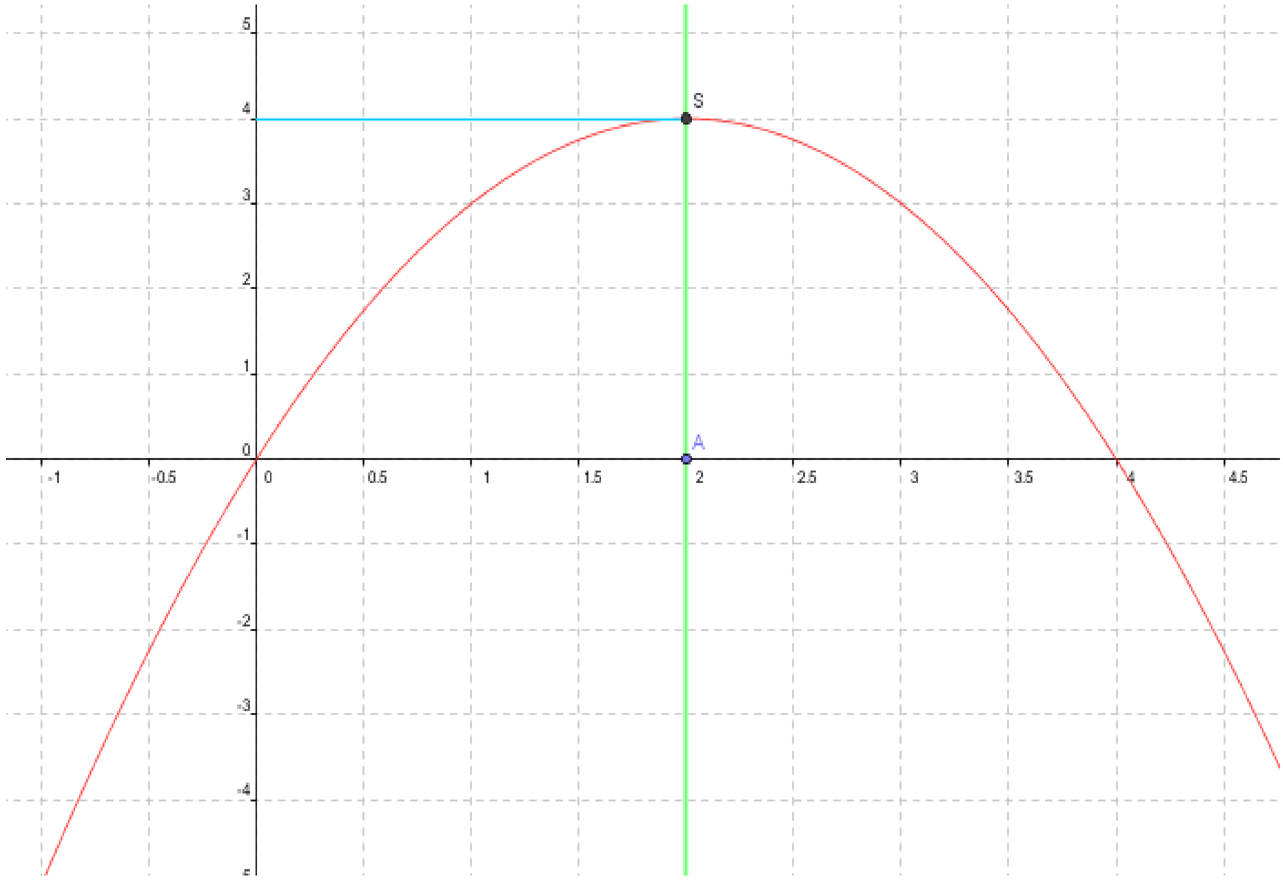
x	$-\infty$	**1**	$+\infty$
f(x)	↗	4	↘

f(2) est le maximum de f sur $\mathbb{R}$

Tableau de valeurs

x	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	-5	0	3	4	3	0	-5

Représentation graphique



La courbe représentative de f est une parabole de sommet S(2;4). L'axe de symétrie est la droite d'équation x=2

2.5. Cas général

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c$$

f est définie sur $\mathbb{R}$, a est un réel non nul donné , b, c sont deux réels donnés. On peut démontrer les résultats suivants

1er cas : a > 0

La valeur intervenant : $-\dfrac{b}{2a}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(-\dfrac{b}{2a})$	$\nearrow$	

- ✔ $f(-\dfrac{b}{2a})$ Est le minimum de f.
- ✔ La courbe est une parabole de sommet $S(-\dfrac{b}{2a}\,;\, f(-\dfrac{b}{2a}))$
- ✔ L'axe de symétrie de la parabole est : $x = -\dfrac{b}{2a}$

2ème cas : a < 0

La valeur intervenant : $-\dfrac{b}{2a}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-\dfrac{b}{2a})$	$\searrow$	

- ✔ $f(-\dfrac{b}{2a})$ Est le maximum de f.
- ✔ La courbe est une parabole de sommet $S(-\dfrac{b}{2a}\,;\, f(-\dfrac{b}{2a}))$
- ✔ L'axe de symétrie de la parabole est : $x = -\dfrac{b}{2a}$

3. Signe d'un produit de facteurs.

3.1. Consignes

Pour déterminer le signe d'un produit de facteurs, on détermine le signe de chaque facteurs et on applique la règle des signes.

On donne le résultat sous forme de tableau.

3.2. Exemple

- ✔ On résout P(x) = 0

  $2-x=0$ ou $x+5=0$

  $x=2$ ou $x=-5$

- ✔ On range ces valeurs dans l'ordre croissant.

  $-5<2$

- ✔ On utilise ensuite les résultats pour la détermination du signe d'un polynôme du 1er degré

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
Signe de: x + 5		-	0	+		+	
Signe de: 2 - x		+		+	0	-	
Signe de P(x)		-	0	+	0	-	

4. Résolution d'une inéquation du 2ième degré

4.1. Consignes

Pour résoudre une inéquation du 2ième degré, on peut

- ✔ ***Transposer tous les termes dans le premier terme.***
- ✔ ***Factoriser (si cela est possible) le polynôme obtenu***
- ✔ ***Déterminer son signe***

Si le polynôme n'est pas factorisable, on vérifiera sur des exemples que le maximum est négatif ou que le minimum est positif.

4.2. Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(5x-1)^2>(x-7)^2$

$(5x-1)^2-(x-7)^2>0$ {Identité remarquable : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$}

$[(5x-1)+(x-7)]\times[(5x-1)-(x-7)]>0$

$(6x-8)(4x+6)>0$

On note $P(x)=(6x-8)(4x+6)$

$6x-8=0$ ou $4x+6=0$

$x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ ou $x=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}<\frac{4}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de: 6x - 8		-		-	0	+	
Signe de: 4x +6		-	0	+		+	
Signe de P(x)		+	0	-	0	+	

$S=]-\infty;-\frac{3}{2}]\cup[\frac{4}{3};+\infty[$