Fiche exercices

EXERCICE 1

- Développer et réduire les expressions suivantes
  - $A=(-2x+3)(4x-5)-8(4x-5)$
  - $B=-2(3x-1)(5-x)-13(x^2-2)$
  - $C=-6(1-2x^2)+3(3-4x)(2x-3)$

  (On peut vérifier les résultats en utilisant le logiciel géogébra par exemple)

- Factoriser les polynômes suivants :
  - $A=(2x^2-8)-(2-x)(5+x)$
  - $B=(1-2x)^2-4(5+3x)^2$
  - $C=3(2x-3)(5-7x)-(49x^2-25)$

  (On peut vérifier les résultats en utilisant le logiciel géogébra par exemple)

- Transformation du polynôme du 2ième degré
  - $P(x)=-3x^2+5x-2$ puis résoudre $P(x)=0$

EXERCICE 2

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)=-x^2+3$$

- Étudier les variations de f dans $\mathbb{R}$
- Dresser le tableau des variations de f
- Construire la courbe représentative de f sur [-3;3] dans un repère orthogonal.
- Résoudre graphiquement les équations suivantes :
  - $f(x)=-1$
  - $f(x)=0$

  Déterminer ensuite graphiquement le signe de $f(x)$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système d'inéquation.

$$\begin{cases}(2x+1)(3-x)\leq 0\\(x+1)^2\geq(2x-3)^2\end{cases}$$

EXERCICE 4

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

- ✔ Montrer que f admet un maximum pour x = -2
- ✔ Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$
- ✔ Construire la courbe représentative de f sur [-6;4] dans le repère orthogonal

EXERCICE 5

- ✔ Développer et réduire les expressions suivantes
  - $A=(-4x+1)(-3x+5)-(15-x)(8x-5)$
  - $B=-4(5x+6)(3-4x)-16(3x^2+5x-1)$

  (On peut vérifier les résultats en utilisant le logiciel géogébra par exemple)

- ✔ Factoriser les polynômes suivants :
  - $A=(5x+3)(4x-5)-6(4x-5)$
  - $B=(5x+1)^2-(3-x)^2$

  (On peut vérifier les résultats en utilisant le logiciel géogébra par exemple)

- ✔ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation
  - $2x^2-5x-7=0$

EXERCICE 6

- ✔ Développer et réduire le polynôme

  $P(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-3$

- ✔ Déterminer les variations de f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{5}{2}$$

  Dresser le tableau de variations de f

- ✔ Construire la courbe représentative de f sur [-3;5] dans un repère orthogonal.
- ✔ Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [-3;5]

EXERCICE 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système d'inéquation.

$$\begin{cases}(3-4x)(5+2x)\leq 0\\ (x+4)(7-3x)\geq 0\end{cases}$$

EXERCICE 8

ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

On choisit la longueur AB pour unité de longueur, c'est à dire AB = AC = 1

Pour $x\in[0;1]$ on considère le point E de [AB] tel que $BE=x$

F est le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par E et de la droite (BC).

- ✔ Réaliser la figure
- ✔ Calculer la valeur maximale de l'aire du triangle EAF (justifier le résultat).

CORRECTION

EXERCICE 1

Développer :

- $A=(-2x+3)(4x-5)-8(4x-5)$

  $A=-8x^2+12x+10x-15-32x+40$

  $\boxed{A=-8x^2+-10x+25}$

- $B=-2(3x-1)(5-x)-13(x^2-2)$

  $B=-2(15x-5-3x^2+x)-13x^2+26$

  $B=-30x+10+6x^2-2x-13x^2+26$

  $\boxed{B=-7x^2-32x+36}$

- $C=-6(1-2x^2)+3(3-4x)(2x-3)$

  $C=-6+12x^2+3(6x-8x^2-9+12x)$

  $C=-6+12x^2+18x-24x^2-27+36x$

  $\boxed{C=-12x^2+54x-33}$

Factoriser

- $A=(2x^2-8)-(2-x)(5+x)$

  $A=2(x^2-4)-(2-x)(5+x)$

  $A=2(x-2)(x+2)+(x-2)(5+x)$

  $A=(x-2)[2(x+2)+5+x]$

  $\boxed{A=(x-2)(3x+9)}$

- $B=(1-2x)^2-4(5+3x)^2$

  $B=(1-2x)^2-[2(5+3x)^2]$ $\longleftarrow$ $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$

  $B=[(1-2x)-2(5+3x)][(1-2x)+2(5+3x)]$

  $B=(1-2x-10-6x)(1-2x+10+6x)$

  $\boxed{B=(-8x-9)(4x+11)}$

- $C=3(2x-3)(5-7x)-(49x^2-25)$ $\qquad$ $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$

  $C=3(2x-3)(5-7x)-[(7x)^2-5^2]$

  $C=3(2x-3)(5-7x)-[(7x-5)(7x+5)]$

  $C=3(2x-3)(5-7x)+[(5-7x)(7x+5)]$

$C=(5-7x)[3(2x-3)+(7x+5)]$

$\boxed{C=(5-7x)(13x-4)}$

Transformation du polynôme du 2ième degré

✔ $P(x)=-3x^2+5x-2$

$P(x)=-3[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}]$ $\qquad x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}=(x-\frac{5}{6})^2$

$P(x)=-3[(x-\frac{5}{6})^2-\frac{25}{36}+\frac{2}{3}]$

$P(x)=-3[(x-\frac{5}{6})^2-\frac{25}{36}+\frac{24}{36}]$

$P(x)=-3[(x-\frac{5}{6})^2-\frac{1}{36}]$

$\boxed{P(x)=-3(x-\frac{5}{6})^2+\frac{1}{12}}$

Pour résoudre $P(x)=0$

$P(x)=-3[(x-\frac{5}{6})^2-\frac{1}{36}]=-3[(x-\frac{5}{6})^2-(\frac{1}{6})^2]$

$P(x)=-3(x-\frac{5}{6}-\frac{1}{6})(x-\frac{5}{6}+\frac{1}{6})$

$P(x)=-3(x-1)(x-\frac{2}{3})$

$P(x)=0$ un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul.

$x-1=0$ Ou $x-\frac{2}{3}=0$

$\boxed{S=\{1;\frac{2}{3}\}}$

EXERCICE 2

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto f(x)=-x^2+3$$

✔ Étudier les variations de f dans $\mathbb{R}$

a et b sont des nombres réels

- si $0\leq a<b$ alors $a^2<b^2$ et $-a^2>-b^2$

  Donc $-a^2+3>-b^2+3$ Soit $f(a)>f(b)$

$\boxed{\text{f est strictement décroissante sur } [0;+\infty[}$

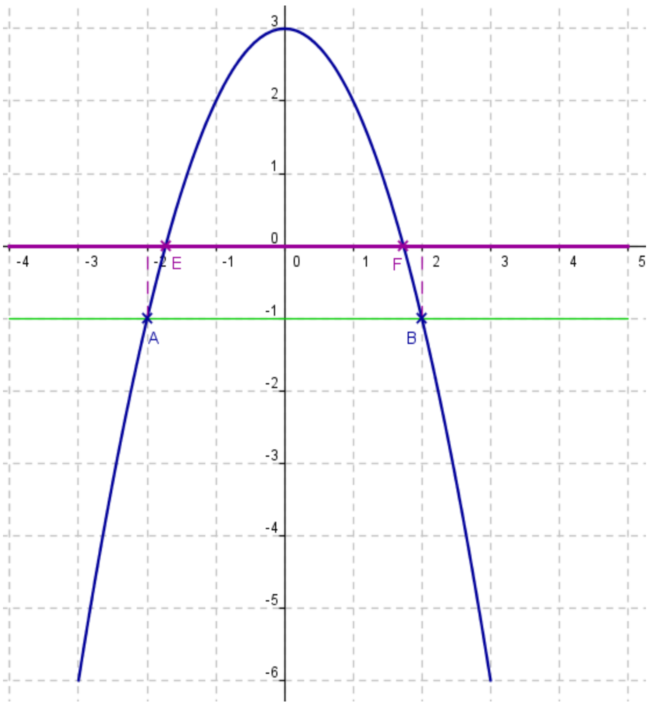
- si $a<b\leq 0$ alors $a^2>b^2$ et $-a^2<-b^2$
  Donc $-a^2+3<-b^2+3$ Soit $f(a)<f(b)$

$\boxed{\text{f est strictement croissante sur }]-\infty;0]}$

✔ Dresser le tableau des variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	3	↘

✔ Construire la courbe représentative de f sur [-3;3] dans un repère orthogonal.



- S(0;3) est le sommet de la parabole. L' axe de la parabole est (y'y).
- $f(x)=-1$
  Les solutions de l'équation $f(x)=-1$ sont les points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y=-1$ Il y a 2 points d'intersection A et B d'abscisses respectives : - 2 et 2
  $\boxed{S=\{-2;2\}}$
- $f(x)=0$
  Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont les points d'intersection de la courbe représentative de f et de l'axe des abscisses. Il y a 2 points d'intersection E et F d'abscisses respectives : - 1,7 et 1,7
  $\boxed{S=\{-1,7;1,7\}}$

✔ Sur $[-1,7;1,7]$ la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses donc si
$x\in[-1,7;1,7]$ alors $\boxed{f(x)\geq 0}$

✔ Sur $[-3;-1,7]$ ou sur $[1,7;3]$ la courbe représentative de f est en dessous de l'axe des abscisses donc si
$x\in[-3;-1,7]\cup[1,7;3]$ alors $\boxed{f(x)\leq 0}$

x	-3		**-1,7**		1,7		3
$f(x)$		-	0	+	0	-	

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système d'inéquation.

$$\begin{cases}(2x+1)(3-x)\leq 0 & (1)\\ (x+1)^2\geq(2x-3)^2 & (2)\end{cases}$$

(1) $(2x+1)(3-x)\leq 0$

$(2x+1)=0$ $\quad$ $(3-x)=0$ $\quad$ $P(x)=(2x+1)(3-x)$

$x=-\dfrac{1}{2}$ $\quad$ $3=x$

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		-	0	+		+	
$3-x$		+		+	0	-	
$P(x)$		-	0	+	0	-	

$$\boxed{S_1=]-\infty\,;-\frac{1}{2}]\cup[3\,;+\infty[}$$

(2) $(x+1)^2\geq(2x-3)^2$

$(x+1)^2-(2x-3)^2\geq 0$

$[(x+1)-(2x-3)][(x+1)+(2x-3)]\geq 0$

$(x+1-2x+3)(x+1+2x-3)\geq 0$

$(-x+4)(3x-2)\geq 0$ $\quad$ $R(x)=(-x+4)(3x-2)$

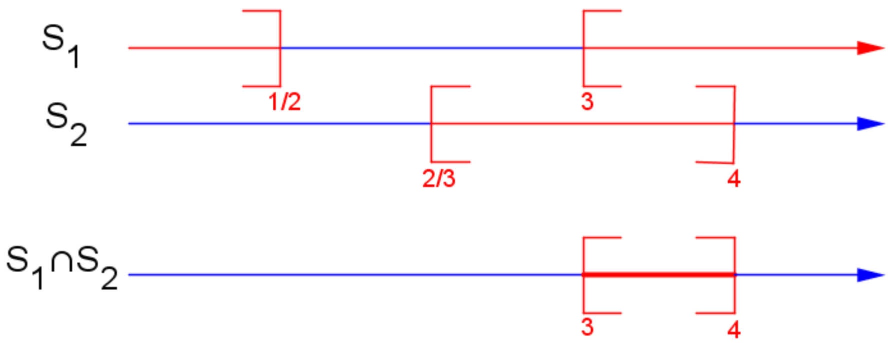
$-x+4=0$ $\quad$ $3x-2=0$

$x=4$ $\quad$ $x=\dfrac{2}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$-x+4$		+		+	0	-	
$3x-2$		-	0	+		+	
$R(x)$		-	0	+	0	-	

$$\boxed{S_2=[\frac{2}{3};4]}$$

$$\boxed{S=S_1 \cap S_2=[3;4]}$$



EXERCICE 4

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=-\frac{1}{4}x^2-x+1 \end{aligned}$$

✔ Montrer que f admet un maximum pour x = -2

Pour démontrer que f admet un maximum pour x = -2, il suffit de démontrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(-2)-f(x)\geq 0$

$$f(-2)-f(x)=2-(-\frac{1}{4}x^2-x+1)=2+\frac{1}{4}x^2+x-1$$

$$f(-2)-f(x)=\frac{1}{4}x^2+x+1$$

$$f(-2)-f(x)=\frac{1}{4}(x^2+4x+4)$$

$$f(-2)-f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2\geq 0$$

Donc f(-2) est le maximum de f.

✔ Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$

De la première question, on déduit

$$2-f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2$$

Soit

$$f(x)=-\frac{1}{4}(x+2)^2+2$$

a et b sont deux réels

- Si $-2\leq a<b$ soit $0\leq a+2<b+2$ alors $(a+2)^2<(b+2)^2$

  Donc $-\frac{1}{4}(a+2)^2>-\frac{1}{4}(b+2)^2$ soit $-\frac{1}{4}(a+2)^2+2>-\frac{1}{4}(b+2)^2+2$

  on a $f(a)>f(b)$

  $\boxed{\text{f est strictement décroissante sur } [-2;+\infty[}$

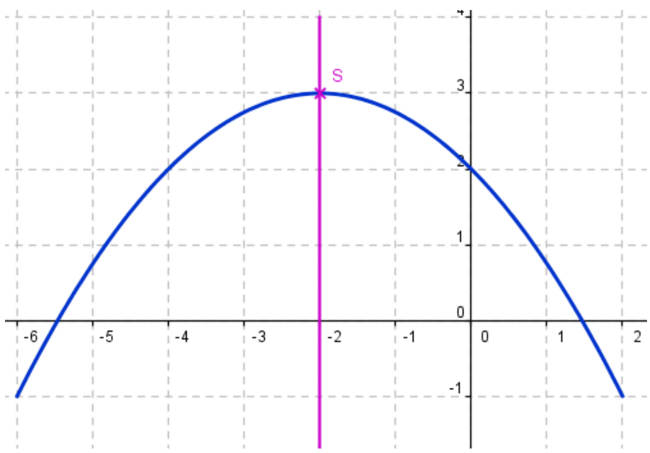
- Si $a<b\leq-2$ soit $a+2<b+2\leq 0$ alors $(a+2)^2>(b+2)^2$

  Donc $-\frac{1}{4}(a+2)^2<-\frac{1}{4}(b+2)^2$ soit $-\frac{1}{4}(a+2)^2+2<-\frac{1}{4}(b+2)^2+2$

  on a $f(a)<f(b)$

  $\boxed{\text{f est strictement croissante sur }]-\infty;-2]}$

✔ Construire la courbe représentative de f sur [-6;4] dans le repère orthogonal



- $S(-2;2)$ Est le sommet de la parabole.
- La droite d'équation : $x=-2$ est l'axe de la parabole.

-

EXERCICE 5

✔ Développer et réduire les expressions suivantes

- $A=(-4x+1)(-3x+5)-(15-x)(8x-5)$

  $A=12x^2-3x-20x+5-(120x-8x^2-75+5x)$

$A=12x^2-3x-20x+5-120x+8x^2+75-5x$

$\boxed{A=20x^2-148x+80}$

- $B=-4(5x+6)(3-4x)-16(3x^2+5x-1)$

  $B=-4(15x+18-20x^2-24x)-48x^2-80x+16$

  $B=-60x-72+80x^2+96x-48x^2-80x+16$

  $\boxed{B=-32x^2-44x-56}$

✔ Factoriser les polynômes suivants :

- $A=(5x+3)(4x-5)-6(4x-5)$

  $A=(4x-5)[(5x+3)-6]$

  $\boxed{A=(4x-5)(5x-3)}$

- $B=(5x+1)^2-(3-x)^2$

  $B=[(5x+1)-(3-x)]\times[(5x+1)+(3-x)]$

  $B=(5x+1-3+x)(5x+1+3-x)$

  $B=(6x-2)(4x+4)$

✔ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

- $2x^2-5x-7=0$

  $2[x^2-\frac{5}{2}x-\frac{7}{2}]=0$

or $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=(x-\frac{5}{4})^2$

$2[(x-\frac{5}{4})^2-\frac{25}{16}-\frac{7}{2}]=0$

$2[(x-\frac{5}{4})^2-\frac{25+56}{16}]=0$

$2[(x-\frac{5}{4})^2-\frac{81}{16}]=0$

$2[(x-\frac{5}{4})-\frac{9}{4}]\times[(x-\frac{5}{4})+\frac{9}{4}]=0$

$2(x-\frac{14}{4})(x+1)=0$

$2(x-\frac{7}{2})(x+1)=0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un facteur est nul.

$$(x-\frac{7}{2})=0 \text{ Ou } (x+1)=0$$

$$x=\frac{7}{2} \text{ ou } x=-1$$

$$\boxed{S=\{-1;\frac{7}{2}\}}$$

EXERCICE 6

✔ Développer et réduire le polynôme

$$P(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-3$$

$$P(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x+1)-3$$

$$P(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}-3$$

$$\boxed{P(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2}}$$

✔ Déterminer les variations de f définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Donc $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-3$

a et b sont deux réels.

- Si $1\leq a<b$ soit $0\leq a-1<b-1$ alors $(a-1)^2<(b-1)^2$

  donc $\frac{1}{2}(a-1)^2<\frac{1}{2}(b-1)^2$ et $\frac{1}{2}(a-1)^2-3<\frac{1}{2}(b-1)^2-3$

  et $f(a)<f(b)$

  f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

- Si $a<b\leq 1$ soit $a-1<b-1\leq 0$ alors $(a-1)^2>(b-1)^2$

  donc $\frac{1}{2}(a-1)^2>\frac{1}{2}(b-1)^2$ et $\frac{1}{2}(a-1)^2-3>\frac{1}{2}(b-1)^2-3$

  et $f(a)<f(b)$

  f est strictement décroissante sur $]-\infty;1]$

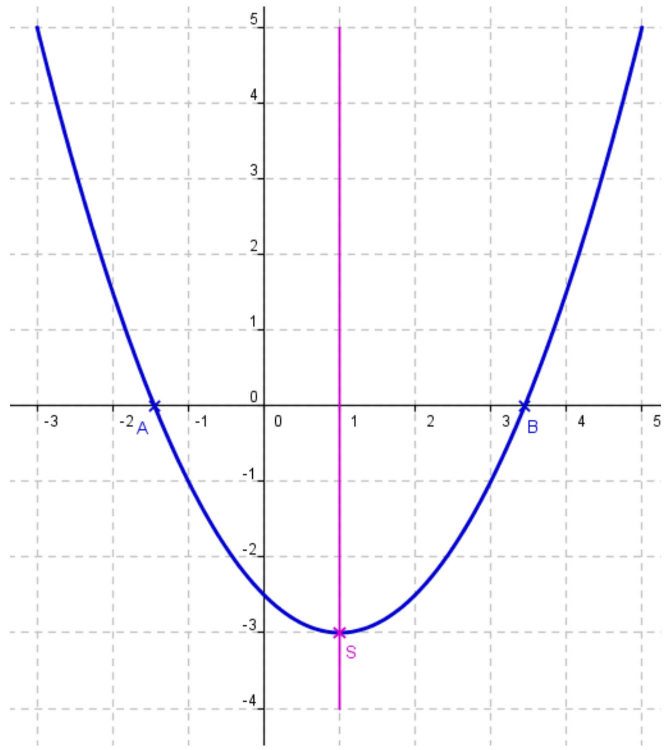
✔ Dresser le tableau de variations de f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f		**- 3**	

f(1) = -3 minimum de f.

✔ Construire la courbe représentative de f sur [-3;5] dans un repère orthogonal.

S(1 ; - 3) est le sommet de la parabole. L'axe de la parabole est le droite d'équation x = 1



✔ Déterminer graphiquement le signe de $f(x)$ sur l'intervalle [-3;5]

Les solutions de l'équation f(x) = 0 sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f et l'axe des abscisses .

Il y a deux points d'intersection A et B d'abscisses respectives : -1,5 et 3,5 (Valeurs approchées)

- Sur $[-1{,}5\,;3{,}5]$ la courbe représentative de f est en dessous de l'axe des abscisses donc :

  Si $x\in[-1{,}5\,;3{,}5]$ alors $\boxed{f(x)\leq 0}$

- Sur $[-3\,;-1{,}5]$ ou sur $[3{,}5\,;5]$ la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses donc :

  Si $x\in[-3\,;-1{,}5]\cup[3{,}5\,;5]$ alors $\boxed{f(x)\geq 0}$

x	-3		-1,5		3,5		5
Variations de f(x)		+	0	-	0	+	

EXERCICE 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système d'inéquation.

$$(I)\begin{cases}(3-4x)(5+2x)\leq 0 & (1)\\ (x+4)(7-3x)\geq 0 & (2)\end{cases}$$

(1) $(3-4x)(5+2x)\leq 0$

$3-4x=0$

$3=4x$

$\frac{3}{4}=x$

$5+2x=0$

$2x=-5$

$x=-\frac{5}{2}$

$P(x)=(3-4x)(5+2x)$

$-\frac{5}{2}<\frac{3}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$3-4x$		+		+	0	-	
$5+2x$		-	0	+		+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	

$$\boxed{S_1=]-\infty;-\frac{5}{2}]\cup[\frac{3}{4};+\infty[}$$

(2) $(x+4)(7-3x)\geq 0$

$x+4=0$

$x=-4$

$7-3x=0$

$7=3x$

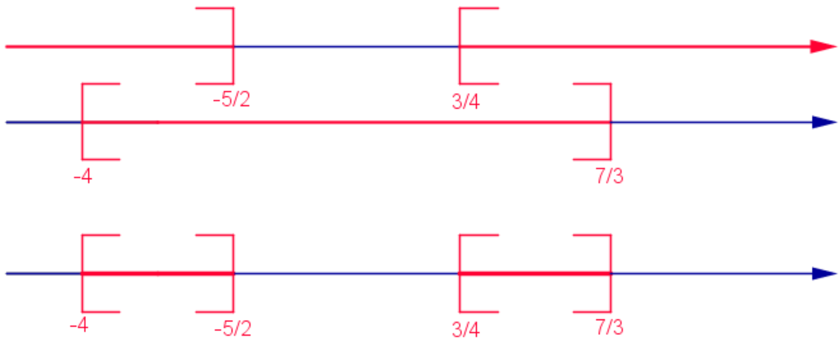
$x=\frac{7}{3}$

$R(x)=(x+4)(7-3x)$

$-4<\frac{7}{3}$

x	$-\infty$		-4		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$x+4$		-	0	+	0	+	
$7-3x$		+		+	0	-	
$R(x)$		-	0	+	0	-	

$$\boxed{S_2=[-4;\frac{7}{3}]}$$



$$\boxed{S_I=S_1\cap S_2=[-4;-\frac{5}{2}]\cup[\frac{3}{4};\frac{7}{3}]}$$

EXERCICE 8

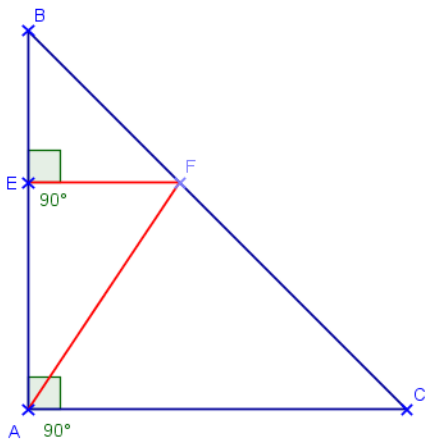
ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

On choisit la longueur AB pour unité de longueur, c'est à dire AB = AC = 1

Pour $x\in[0;1]$ on considère le point E de [AB] tel que $BE=x$

F est le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par E et de la droite (BC).

- ✔ Réaliser la figure



✔ Calculer la valeur maximale de l'aire du triangle EAF (justifier le résultat).

Le triangle ABC est rectangle isocèle en A donc $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=45°$

Rappel :
Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre

Le triangle BEF est rectangle en E (car (EF) est parallèle à (AC)) or $\widehat{EBF}=45°$ donc le triangle BEF est rectangle isocèle en E

$BE=EF=x$

$AE=AB-BE=1-x$

Le triangle AEF est rectangle en E donc l'aire de ce triangle est :

$\frac{1}{2}AE\times EF=\frac{1}{2}(1-x)x$

On note $a(x)=\frac{1}{2}(1-x)x$ pour $x\in[0;1]$

$a(x)$ est une fonction polynôme du deuxième degré

$a(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}[x^2-x]$

$x^2-x+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2$ donc $x^2-x=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$a(x)=-\frac{1}{2}[x^2-x]=-\frac{1}{2}[(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}]$

$a(x)=-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{8}$

Pour tout $x\in[0;1]$

$-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2\leq 0$

$\frac{1}{8}-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2\leq\frac{1}{8}$

donc $a(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}$ est le maximum de a sur $[0;1]$ et l'aire du triangle est maximale pour $x=\frac{1}{2}$

Cette aire est alors égale à $\frac{1}{8}$