Généralités sur les fonctions numériques

1. Notion de fonctions

1.1. Définition

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Définir une fonction sur D, c'est associer à tout nombre réel x de D un unique réel noté f(x)

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)$$

f(x) est ***l'image*** de x par la fonction f. On dit que x est la ***variable***.

1.2. Exemples

D est un ensemble fini

On peut en ayant D ensemble fini, définir la fonction par la donnée d'un tableau de valeurs.

$$D = \left\{-4\,;1\,;1{,}5\,;\frac{7}{3}\,;\sqrt{11}\right\}$$

x	-4	1	1,5	$\frac{7}{3}$	$\sqrt{11}$
f(x)	5	0	3	$-\sqrt{2}$	$\frac{3}{13}$

Dans ce cas , on a :

- ✔ f(-4) = 5 ; f(1) = 0 ; f(1,5) = 3 ; f($\frac{7}{3}$) = $-\sqrt{2}$; f($\sqrt{11}$)= $\frac{3}{13}$
- ✔ On dit « ***l'image de -4 par f est 5*** »

D est un ensemble infini

Pour un ensemble infini, on peut donner un « procédé » permettant de calculer l'image de tout élément de D.

Exemple 1 : D = $\mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n) = 2^n$$

- ✔ f(3) = 2^3 = 8
- ✔ f(-2) = 2^{-2} = $\frac{1}{4}$

Lorsque D = $\mathbb{Z}$ ou une partie de $\mathbb{Z}$, on utilise souvent pour représenter la variable la lettre « n ».

Exemple 2 : D = $\mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = 2x-4$$

- ✔ f(3) = $2\times3-4=2$
- ✔ f(-5) = $2(-5)-4=-10-4=-14$
- ✔ f($\sqrt{2}$) = $2\sqrt{2}-4$
- ✔ f($\frac{1}{3}$) = $\frac{2}{3}-4=$ - $\frac{10}{3}$

D est une réunion d'intervalles

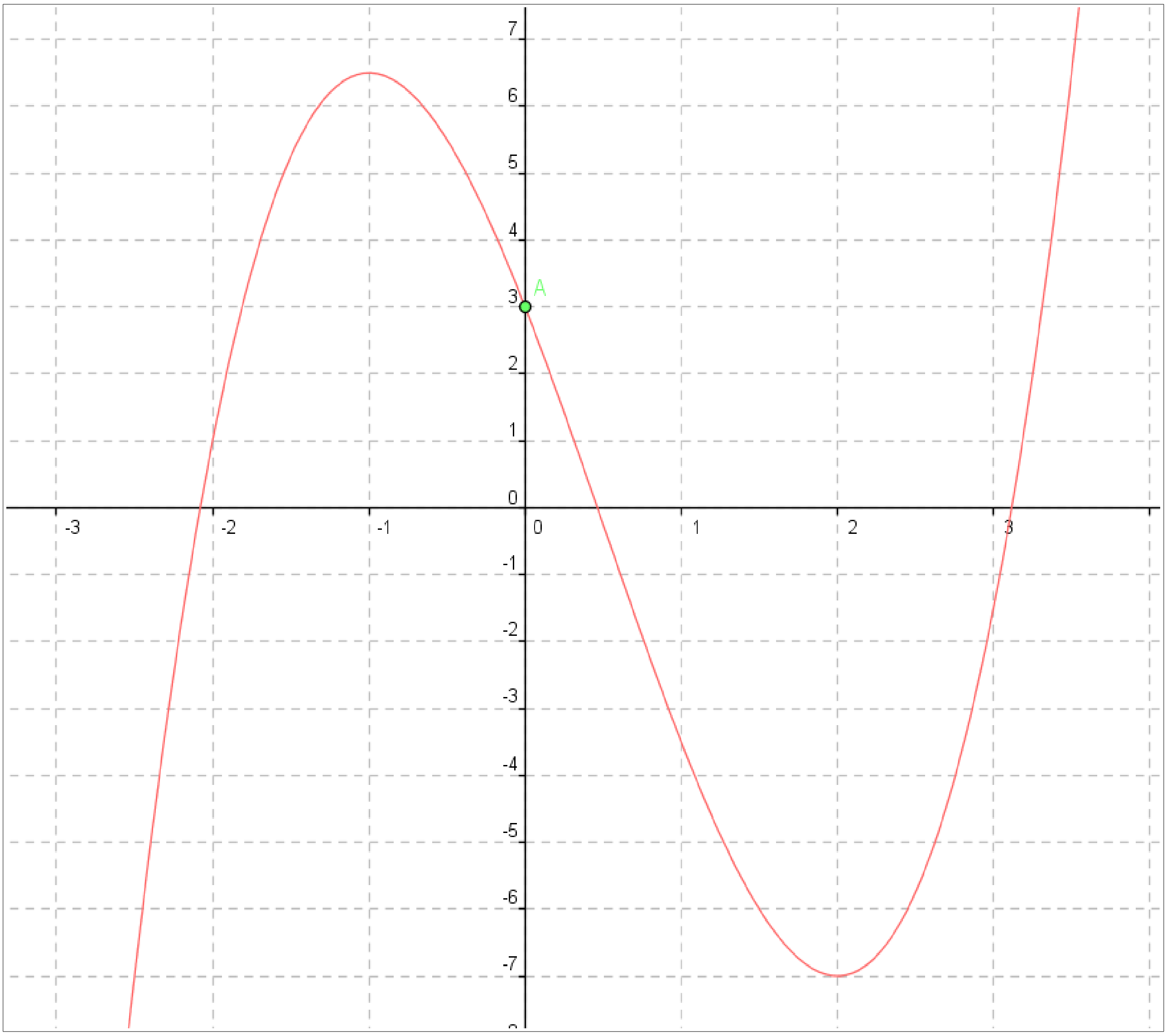
D = $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

x est le dénominateur, donc x doit être non nul. On dit alors que 0 est une valeur interdite.

On peut définir une fonction par sa courbe représentative.

Un repère du plan étant choisi. La courbe représentative (nommée aussi représentation graphique de f) est l'ensemble des points M(x;y) avec $x\in D$ et y est l'image de x par f. C'est à dire y= f(x).



A(0;3) donc f(0) = 3

2.3.Remarques

On peut définir des fonctions de deux variables ou de plusieurs variables. Voici quelques exemples :

Formules permettant de calculer des aires

1. Aire du rectangle est égale au produit de la longueur et de la largeur. On peut écrire :

   $f(L;l)=L\times l$ (L et l sont des réels positifs)

2. Aire d'un triangle

   $f(b;h)=\dfrac{b\times h}{2}$ (b et h sont des réels positifs)

3. Aire d'un secteur angulaire (angle de x degrés et de rayon R)

   $f(R;x)=\pi R^2\times\dfrac{x}{360}$

4. Vitesse (d : distance en km, t : temps en h, v : vitesse en km/h)

$$f(d\,;t)=\frac{d}{t}$$ (d est un réel positif, t est un réel strictement positif)

L'utilisation des fonctions à plusieurs variables ne se limite pas au seules mathématiques, on les utilise aussi dans pleins d'autres domaines.

Par exemple $U=RI$ (en physique).

Si on considère maintenant les volumes, on peut employer des fonctions de 3 variables.

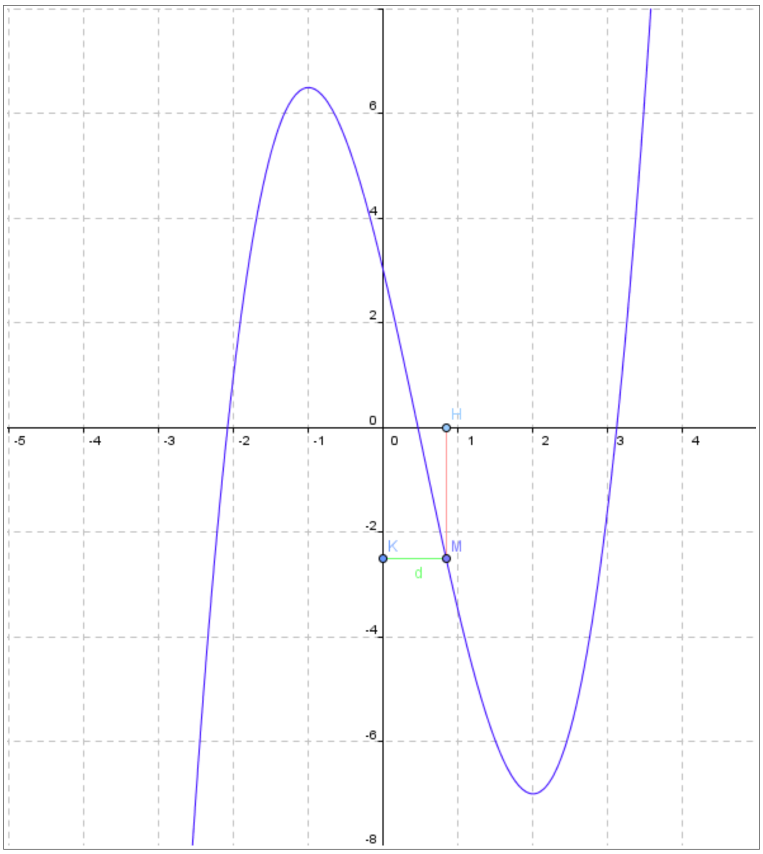
2. Lecture et résolutions graphiques

Le repère est orthogonal.

2.1. Lecture graphique de l'image d'un nombre réel

Si $a\in D$ alors f(a) est l'ordonnée du point de la courbe ayant pour abscisse a.

1. On place le point H(a;0). H est un point de l'axe des abscisses.
2. On détermine le point M de la courbe ayant pour abscisse a. Pour ce faire :
   - ✔ Si $M\neq H$ on trace le segment [MH] vertical
   - ✔ Si M n'est pas sur l'axe des ordonnées, on trace le segment horizontal [MK] avec K appartenant à l'axe des ordonnées et f(a) est l'ordonnée du point K.



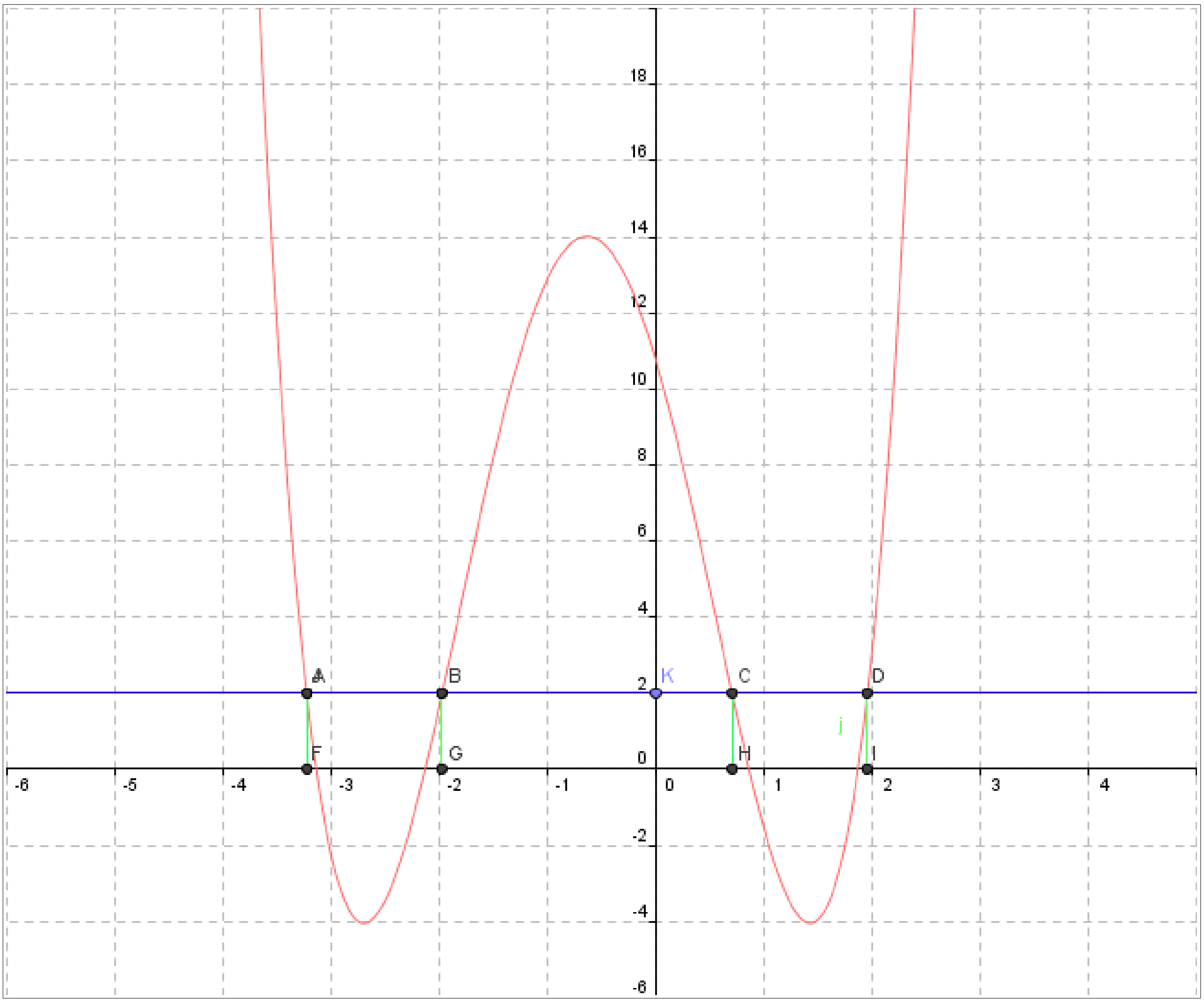
2.2.Résolution graphique de l'équation f(x)=k

On considère le point ***K(0;k)*** et la droite horizontale ***d*** passant par K.

On remarque que tout point de la droite ***d*** a pour ordonnée : ***k***. On dit alors que ***d est la droite d'équation y=k.***

Les solutions de l'équation f(x) = k sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de la droite d

- ✔ S'il n'existe pas d'intersection alors l'ensemble des solutions de l'équation *f(x)* = *k* est l'ensemble vide.
- ✔ Une solution de l'équation *f(x)* = *k* se nomme aussi « **antécédent de k par f** ». (Le nombre k peut admettre plusieurs antécédents.



Remarque :

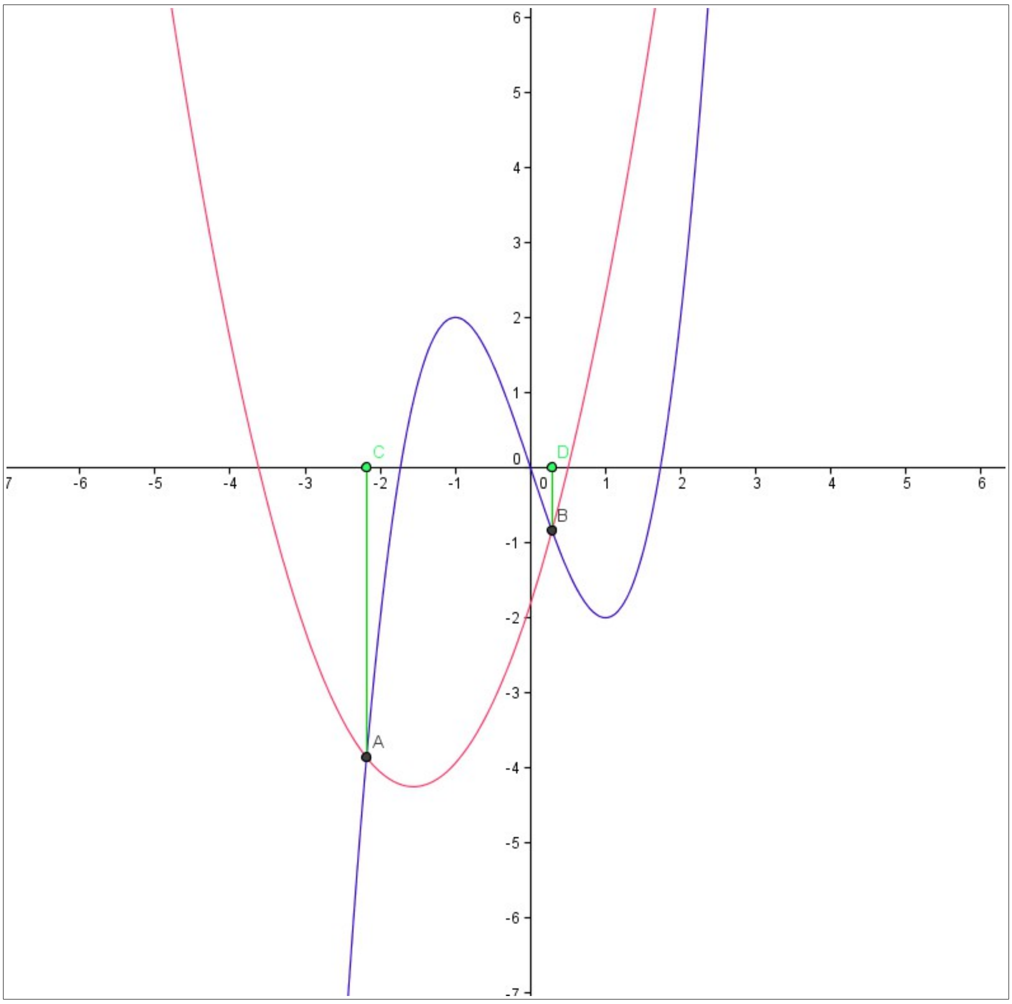
2 admet quatre antécédents par f :

-3,2 ; -2 ; 0,8 ; 2 (on obtient les valeurs approchées par lecture graphique)

2.3. Résolution graphique d'une équation du type f(x) = g(x)

Définition

Les solutions de l'équation f(x) = g(x) sont les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives de f et g.



Remarque :

La courbe représentative de f est en rouge, celle de g est en bleu.

L'équation f(x) = g(x) admet deux solutions qui sont les abscisses des points A et B.

On peut donner pour valeur approchée : - 2,1 et 0,2.

2.4. Résolution graphique d'une inéquation du type f(x) < k

On trace la droite horizontale *d* d'équation *y=k*.

Définition

Les solutions de l'inéquation f(x) <k sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés strictement en dessous de la droite d.

De même :

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq k$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés au dessus ou sur la droite d.

Cas particuliers

Si la courbe est strictement au dessus de d alors

- ✔ pour *$f(x) > k$ S = D ensemble de définition de f*
- ✔ *pour $f(x) \leq k$ S = Ø*

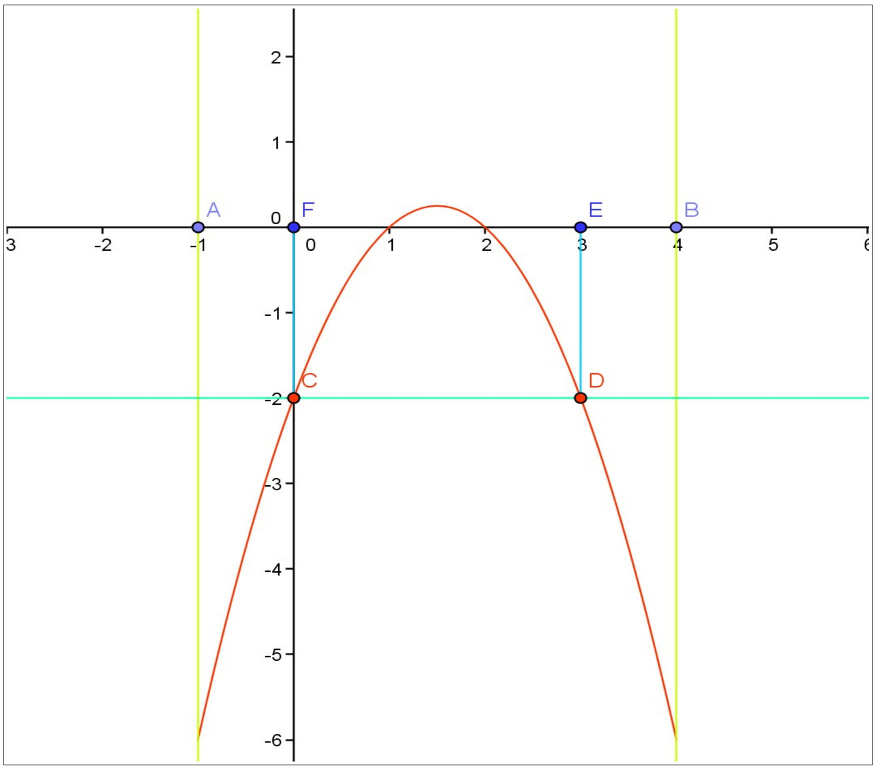
Si la courbe est strictement en dessous de d alors

- ✔ pour *$f(x) \geq k$ S = Ø*
- ✔ *pour $f(x) \leq k$ S = D ensemble de définition de f*

Si k=0, résoudre *$f(x)<0$ et $f(x) >0$,* c'est déterminer le signe de f(x)

Exemples

D = [-1 ; 4]



- ✔ $f(x) \geq -2$ S = [0 ; 3]
- ✔ $f(x) < -2$ S = [-1 ; 0[∪]3 ; 4]
- ✔ $f(x) > 0$ S =]1 ; 2[
- ✔ $f(x) <0$ S =]1 ; 1[∪]2 ; 4]

x	-1		1		2		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.5. Résolution graphique d'une inéquation du type $f(x) \geq g(x)$

On suppose que f et g sont définies sur le même ensemble D.

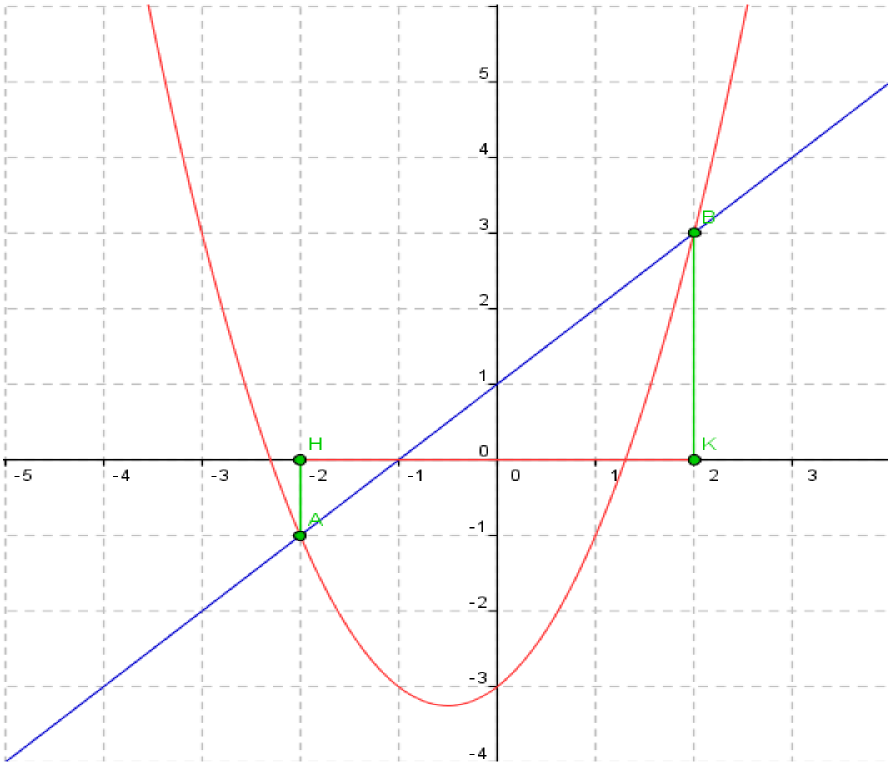
Définition

Les solutions de l'inéquation sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés au dessus ou sur la courbe représentative de g.

Exemples

f et g sont deux fonctions définies sur ℝ. La courbe représentative de f est en rouge sur le dessin ci dessous, celle de g est en bleu.

Résoudre $f(x) > g(x)$



- ✔ Les coordonnées des points d'intersection sont : **A(-2;-1) B(2;3)**
- ✔ $f(x) > g(x)$
  S =]- ∞ ; -2[∪]2 ; + ∞[
- ✔ $f(x) \leq g(x)$ S = [-2 ; 2]

