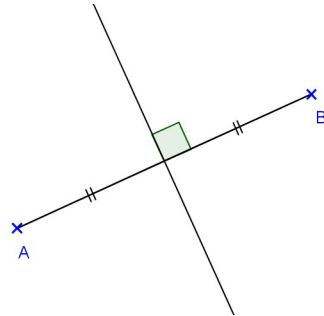


Géométrie

1. Médiatrice d'un segment	p	7. Théorème de Thalès	p
2. Médiatrices d'un triangle	p	8. Réciproque du théorème de Thalès	p
3. Bissectrice d'un angle	p	9. Exercices	p
4. Bissectrices d'un triangle	p	10. Théorèmes des milieux	p
5. Médianes d'un triangle	p	11. Théorème de Pythagore	p
6. Hauteurs d'un triangle	p	12. Réciproque du théorème de Pythagore	p

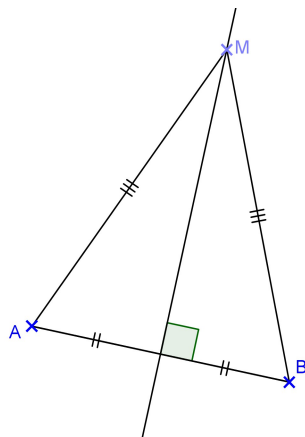
1. Médiatrice d'un segment

La médiatrice d'un segment est la droite qui est perpendiculaire à ce segment et qui passe par le milieu du segment



Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment.

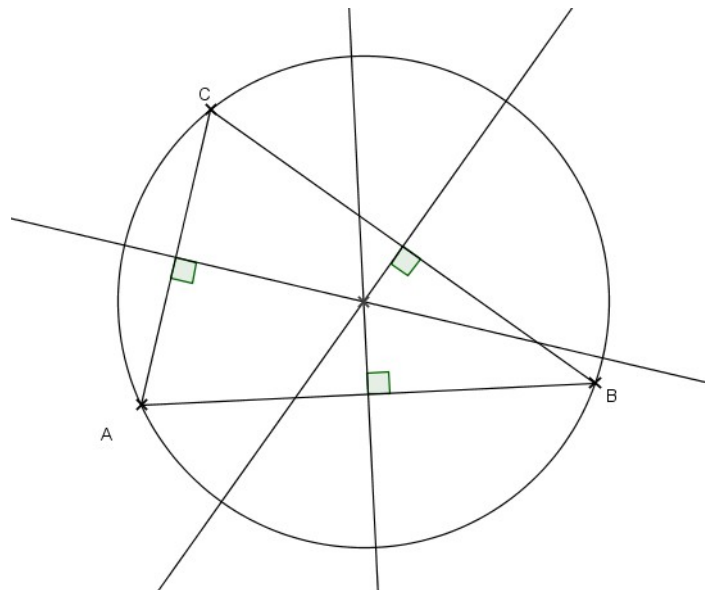
Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors ce point est sur la médiatrice de ce segment.



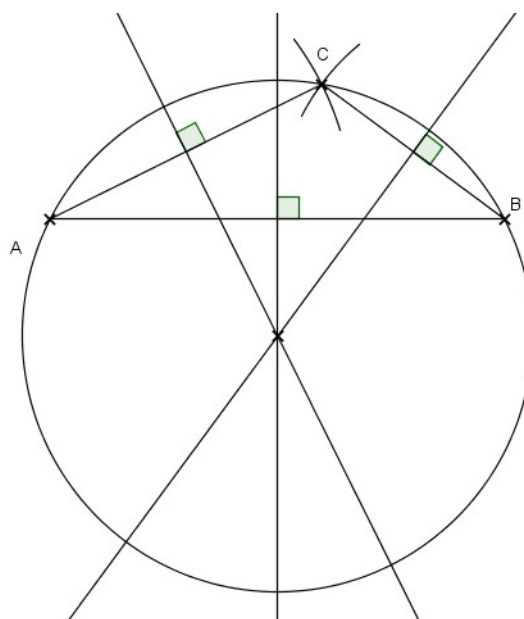
2. Médiatrices d'un triangle

Les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

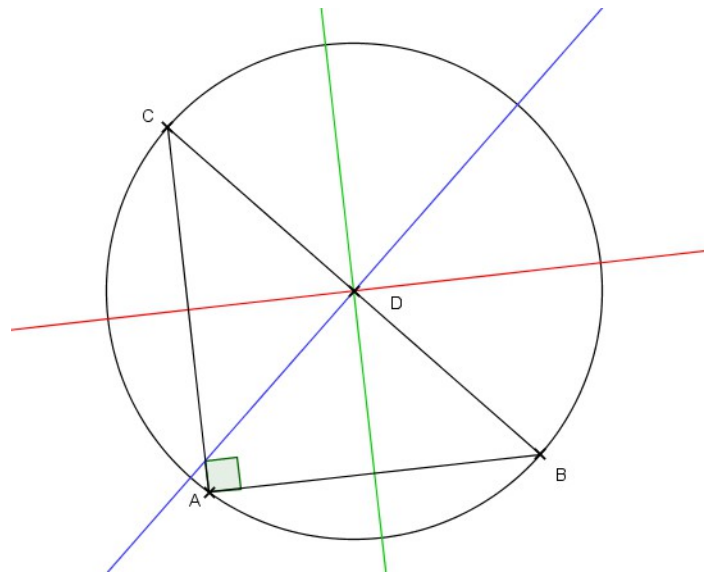
Si les 3 angles du triangle sont aigus alors le centre du cercle circonscrit est à l'intérieur du triangle.



Si l'un des 3 angles du triangle est obtus alors le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle.

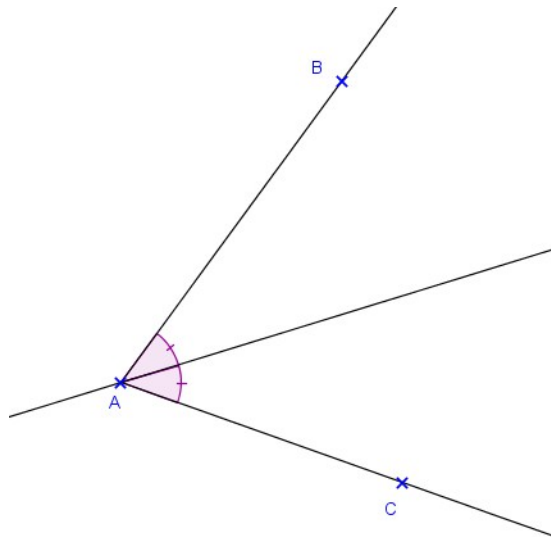


Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse



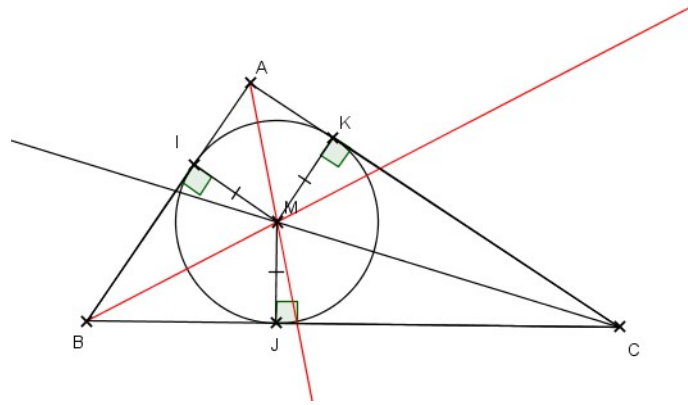
3. Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle est la droite qui partage l'angle en deux angles de même mesure.



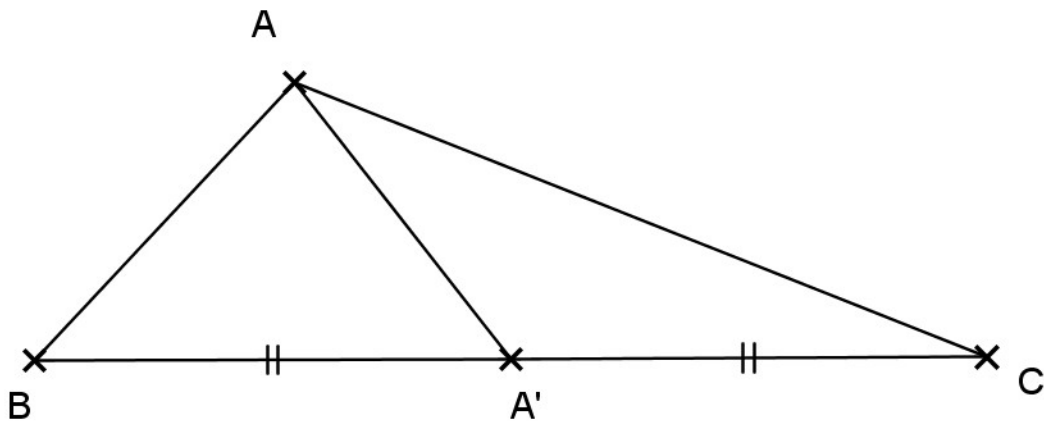
4. Bissectrices d'un triangle

Les bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre du cercle inscrit du triangle. Ce cercle est tangent aux trois côtés du triangle.



5. Médianes d'un triangle

La médiane relative à un côté d'un triangle est le segment qui joint le milieu de ce côté et le sommet opposé.

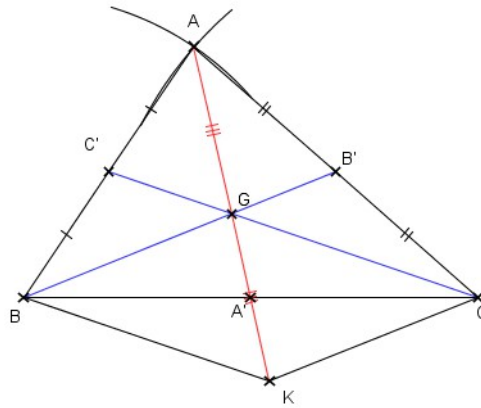


Les trois médianes d'un triangle sont concourantes: leur point d'intersection est appelé centre de gravité du triangle.

Démonstration:

On veut montrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes. Tracer un triangle ABC tel que $BC=6\text{cm}$, $AB=4\text{cm}$ et $AC=5\text{cm}$.

Tracer les médianes $[BB']$ et $[CC']$. Elles se coupent en G.



On veut montrer que la 3^{ème} médiane passe par G.

On trace K le symétrique de A par rapport à G. On appelle A' le point d'intersection entre (BC) et (AG).

Dans le triangle AKC, la droite (GB') passe par G est milieu de [AK] et B' milieu de [AC] donc (GB') est parallèle à (KC)

Dans le triangle ABK, la droite (GC') passe par G milieu de [AK] et par C' milieu de [AB] donc (C'G) est parallèle à (BK)

Les côtés opposés de GCKB sont parallèles deux à deux donc GCKB est un parallélogramme. Par conséquent, ses diagonales se coupent en leur milieu donc A' est le milieu de [BC] et [AA'] est la 3^{ème} médiane du triangle et elle passe par G.

Donc les 3 médianes sont concourantes en G.

De plus,

GCKB est un parallélogramme donc les diagonales [BC] et [GK] se coupent en leur milieu donc A' est le milieu de [GK], par suite:

$$GK = 2GA'$$

Or K est le symétrique de A par rapport à G donc G est le milieu de [AK], par suite:

$$GK = GA$$

Par conséquent:

$$GA = 2GA'$$

On peut écrire aussi:

$$GA' = \frac{1}{3} AA' \quad \text{et} \quad GA = \frac{2}{3} AA'$$

De même,

$$GB' = \frac{1}{3} BB' \quad \text{et} \quad GB = \frac{2}{3} BB'$$

$$GC' = \frac{1}{3} CC' \quad \text{et} \quad GC = \frac{2}{3} CC'$$

Si A', B', C' sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB] et si le point G est le centre de gravité du triangle ABC alors:

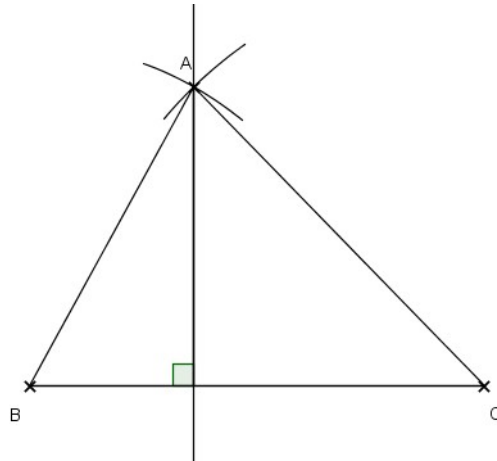
$$GA' = \frac{1}{3} AA' \quad GA = \frac{2}{3} AA' \quad GB' = \frac{1}{3} BB' \quad GB = \frac{2}{3} BB'$$

$$GC' = \frac{1}{3} CC' \quad GC = \frac{2}{3} CC'$$

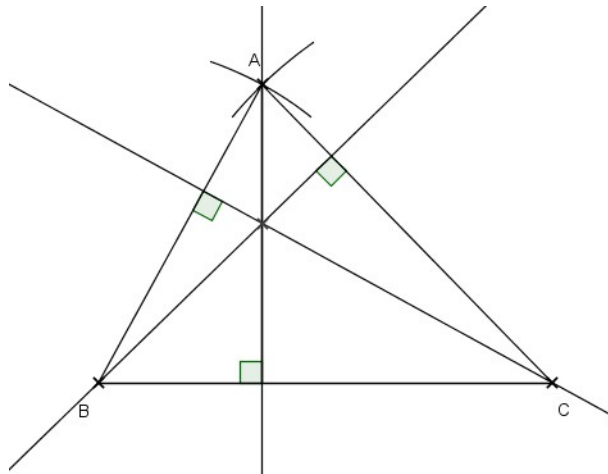
6. Hauteurs d'un triangle

Dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

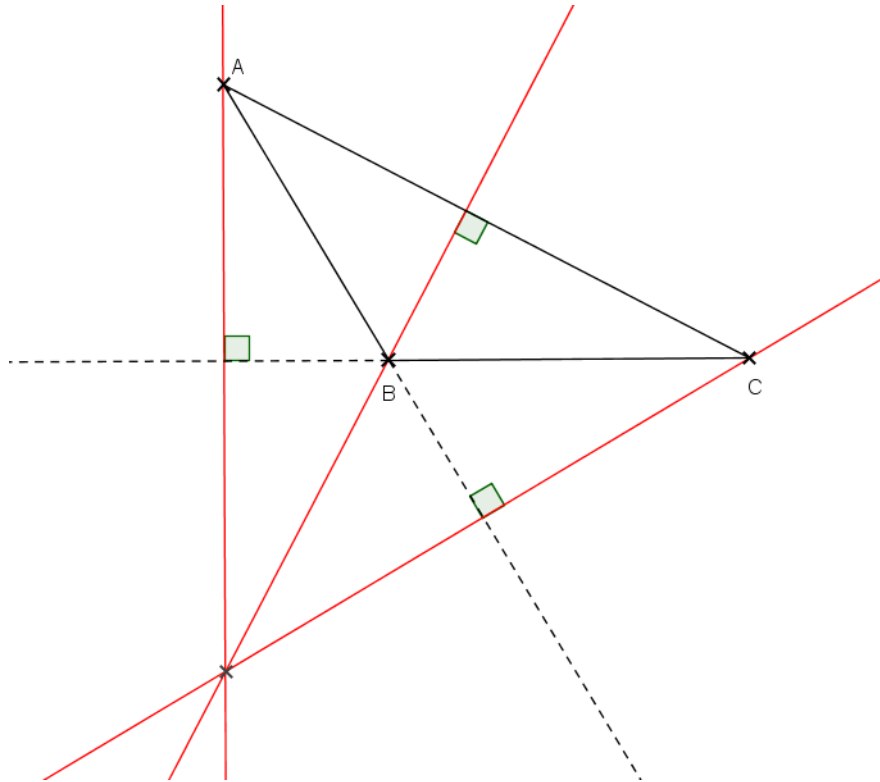
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé orthocentre du triangle.



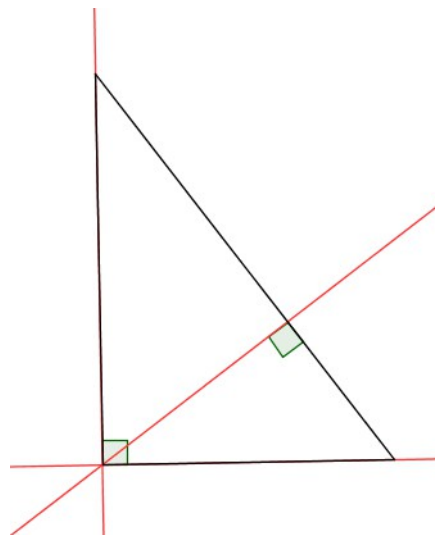
Si les 3 angles du triangle sont aigus, alors l'orthocentre est à l'intérieur du triangle.



Si l'un des angles du triangle est obtus, alors l'orthocentre est à l'extérieur du triangle.



Si le triangle est rectangle, alors l'orthocentre du triangle est le sommet de l'angle droit.



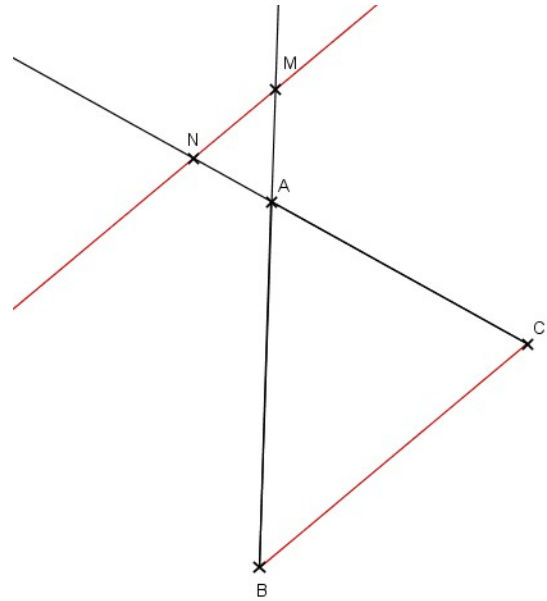
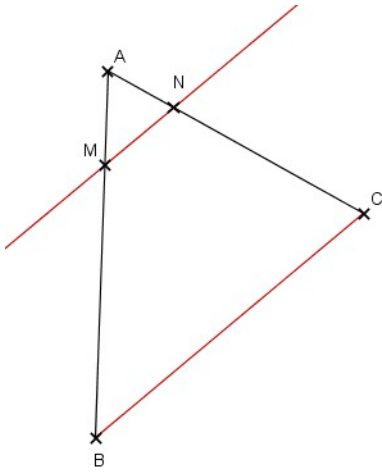
7. Théorème de Thalès

Si les points A, M, B sont alignés

Si les points A, N, C sont alignés

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles

$$\text{Alors } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



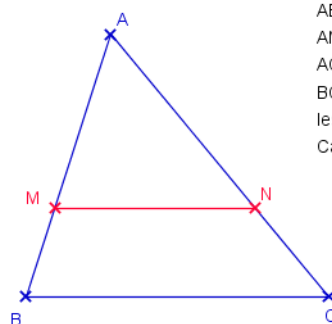
8. La réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre

$$\text{Si } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

Alors d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites (BC) et (MN) sont parallèles

9. Exercices



$AB=3,6\text{cm}$
 $AM=2,4\text{cm}$
 $AC=4,2\text{cm}$
 $BC=5,4\text{cm}$
 les droites (MN) et (BC) sont parallèles
 Calculer les longueurs AN et MN

Les points A, M, B sont alignés.

Les points A, N, C sont alignés.

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{2,4}{3,6} = \frac{AN}{4,2}$$

$$AN = \frac{4,2 \times 2,4}{3,6}$$

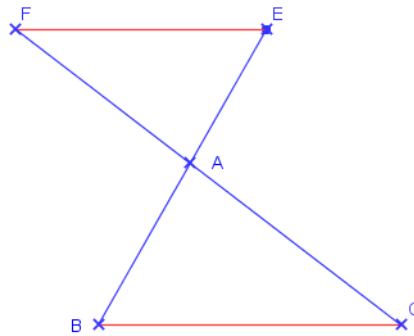
$$AN = 2,8 \text{ cm}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{2,4}{3,6} = \frac{MN}{5,4}$$

$$MN = \frac{5,4 \times 2,4}{3,6}$$

$$MN = 3,6 \text{ cm}$$



AB=2,5cm
 AC=3,5cm
 AE=2cm
 FE=3,2cm
 Les droites (BC) et (FE) sont parallèles
 Calculer les longueurs BC et AF

Les points F, A, C sont alignés.

Les points E, A, B sont alignés.

Les droites (FE) et (BC) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{FE}{CB}$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{AF}{3,5} = \frac{2}{2,5}$$

$$AF = \frac{3,5 \times 2}{2,5}$$

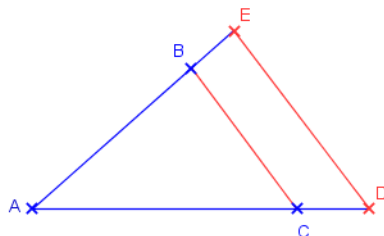
$$AF = 2,8 \text{ cm}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{FE}{BC}$$

$$\frac{2}{2,5} = \frac{3,2}{BC}$$

$$BC = \frac{3,2 \times 2,5}{2}$$

$$BC = 2 \text{ cm}$$



AB=2,8cm
 AC=3,6cm
 AE=3,5cm
 AD=4,5cm
 Que peut-on dire des droites (BC) et (ED)?

Les points A, B, E et A, C, D sont alignés dans le même ordre

$$\frac{AB}{AE} = \frac{2,8}{3,5}$$

$$\frac{AC}{AD} = \frac{3,6}{4,5}$$

$$2,8 \times 4,5 = 12,6$$

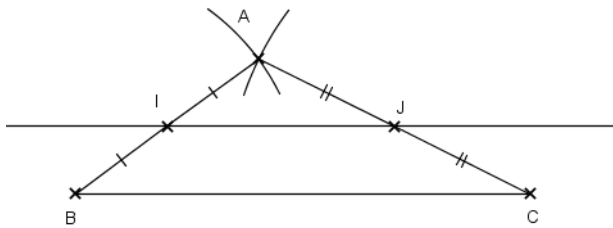
$$3,5 \times 3,6 = 12,6$$

Les produits en croix sont égaux donc $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$

Donc les droites (BC) et (ED) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.

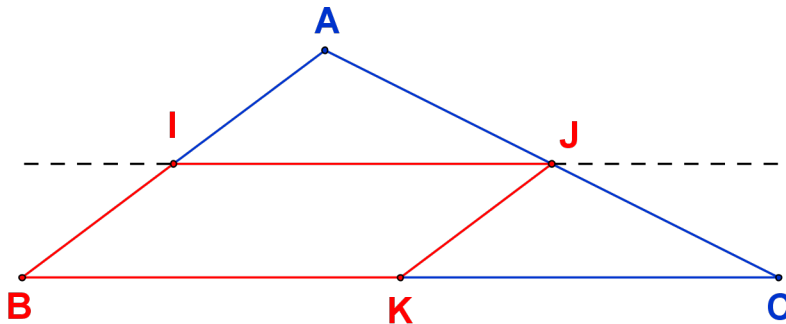
10. Les théorèmes des milieux

10.1.



Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté et la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Démonstration



A, I, B et A, J, C sont alignés dans cet ordre.

I est le milieu de [AB] donc $AI = \frac{1}{2} AB$

J est le milieu de [AC] donc $AJ = \frac{1}{2} AC$

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$$

La réciproque du théorème de Thalès nous permet d'affirmer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

On note K le milieu de [BC].

On démontre de même que les droites (KJ) et (AB) sont parallèles.

La quadrilatère BIJK a ses côtés opposés parallèles deux à deux donc le quadrilatère BIJK est un parallélogramme.

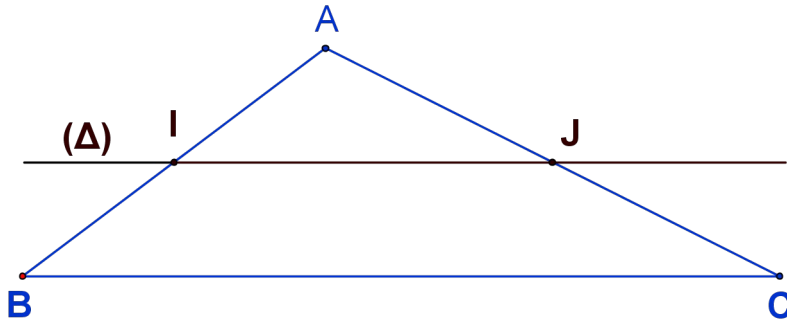
Conséquence

$$IJ = BK = \frac{1}{2} BC$$

10.2.

Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu.

démonstration



(Δ) est la droite parallèle à (BC) passant par I milieu de [AB].

Si on note J le milieu de [AC], alors le théorème précédent nous permet d'affirmer que la droite (IJ) est parallèle à (BC).

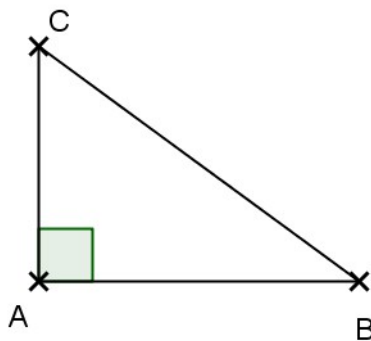
Il existe une unique droite passant par I et parallèle à (BC) donc $(\Delta) = (IJ)$.

Conséquence

(Δ) coupe le segment [AC] en son milieu J.

11. Le théorème de Pythagore

Si un triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$

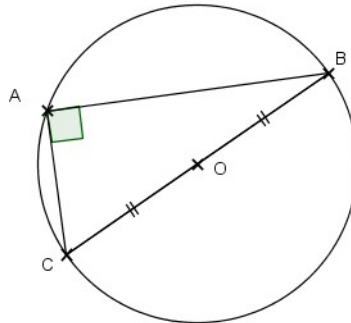


12. La réciproque du théorème de Pythagore

Si les côtés d'un triangle ABC vérifient $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors ABC est rectangle en A.

13. propriétés

Si un triangle ABC est rectangle en A , alors le point A se trouve sur le cercle de diamètre $[BC]$.



Si un point A se trouve sur le cercle de diamètre $[BC]$ alors le triangle ABC est rectangle en A .