Fiche exercices

EXERCICE 1

1. Construire en perspective un cube ABCDEFGH dont les côtés ont pour longueur 3cm (on prendra les notations de la fiche de cours)
2. Déterminer la nature du triangle ACH (on calculera la valeur exacte de la longueur AC)
3. Quelle est la nature du triangle AGE?
Calculer la valeur de la longueur de la diagonale [AG] du cube.
4. $K \in [AD]$ et AK=2cm.
$L \in [BF]$ et BL=1cm.
$M \in [AB]$ et AM=xcm.
Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme KM+LM soit minimale

EXERCICE 2

On considère un tétraèdre régulier ABCD. Toutes ses arêtes ont pour longueur 3cm. I est le milieu de [AB]. G est le centre de gravité du triangle ABC. On admet que [DG] est la hauteur du tétraèdre issue de D. En particulier, le triangle DGC est rectangle en G.
1. Représenter le tétraèdre en perspective cavalière.
2. Calculer CI.
3. Calculer l'aire en cm² du triangle ABC.
4. Calculer DG.
5. Calculer le volume en cm^3 du tétraèdre.
(On donnera les valeurs exactes)

EXERCICE 3

On considère un cône de révolution de sommet S et de base le disque de centre O et de rayon r=2cm. OS=6cm.
1. Représenter le cône en perspective cavalière.
2. Soit M un point du cercle de centre O et de rayon r=2cm. Donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{MSO}$ au degré près.
3. Calculer le volume du cône en cm^3.
4. Calculer l'aire latérale en cm² du cône.

EXERCICE 4

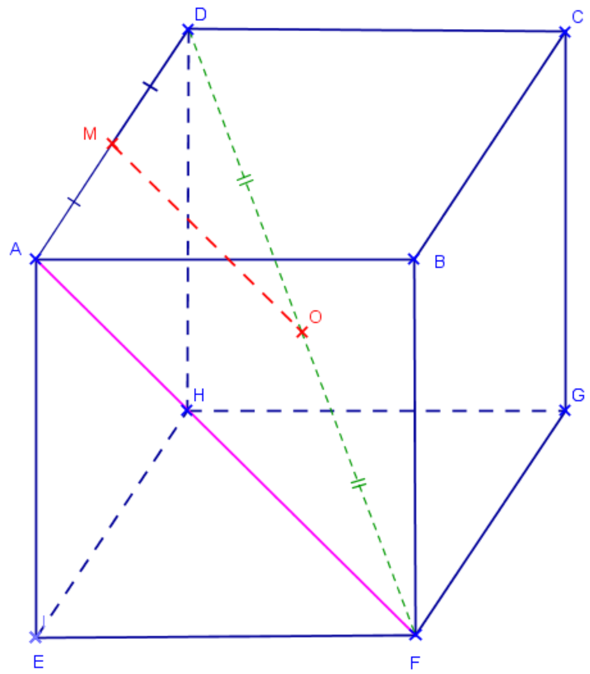
On considère un cylindre de révolution de hauteur 5cm et de rayon de base 1,5cm.
1. Représenter le cylindre en perspective cavalière.
2. Construire le patron de sa surface latérale.
3. Calculer le volume en cm^3 du cylindre. (On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près)
4. Calculer l'aire totale du cylindre en cm². (On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près)

EXERCICE 5

On considère une sphère de centre O et de rayon R=4cm. Soit A un point de la sphère et I le point de [OA] tel que OI=2cm.
Le plan perpendiculaire à (OA) passant par I coupe la sphère selon un cercle de centre I.
1. Représenter la sphère en perspective cavalière.
2. Calculer le volume de cm^3 de la sphère. (On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près)

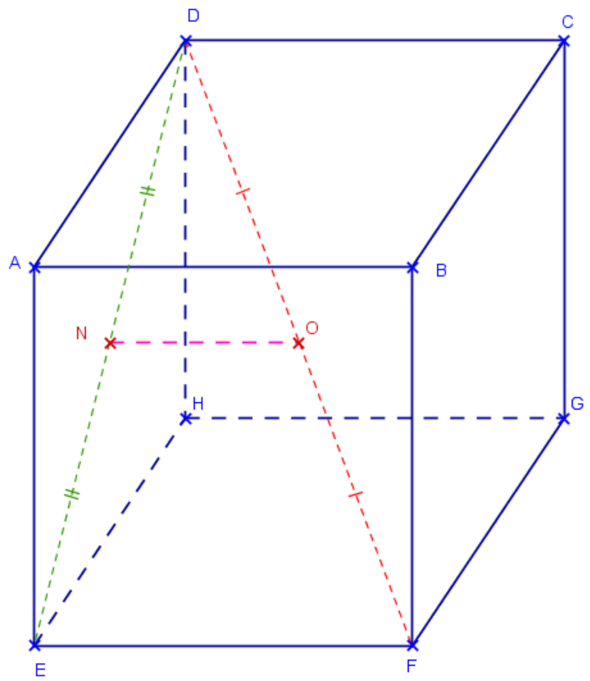
3. Calculer l'aire de la sphère en cm². (On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près)
4. Calculer le rayon r en cm du cercle de centre I.

EXERCICE 6



ABCDEFGH est un cube. AB=5cm.
1. Calculer les longueurs AF et DF en cm.
2. O est le milieu de [DF] et M milieu de [AD].
Calculer la longueur OM en cm.

EXERCICE 7

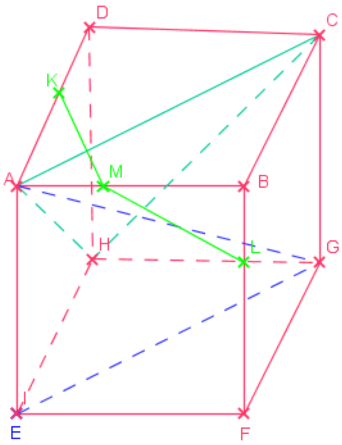


ABCDEFH est un cube. AB=5cm.
O est le milieu de [DF] et N est le milieu de [DE].
Calculer la longueur ON en cm.

CORRECTION

EXERCICE 1

1. Construire en perspective cavalière un cube ABCDEFGH dont les côtés ont pour longueur 3cm



2. Déterminer la nature du triangle ACH

[AC], [AH] et [CH] sont trois diagonales de carrés de 3cm de côté donc AC=AH=CH.
Par suite, le triangle ACH est équilatéral.

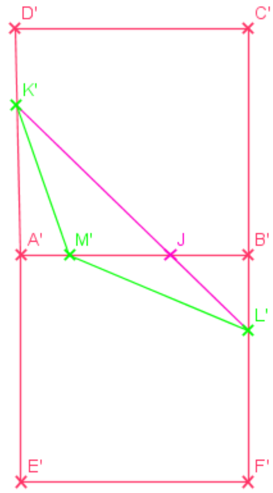
Dans le plan (ABC), le triangle ABC est rectangle en B. J'utilise le théorème de Pythagore:
$AC^2=BA^2+BC^2$
$AC^2=3^2+3^2$
$AC^2=9+9$
$AC^2=18$
$AC=\sqrt{18}$
$AC=3\sqrt{2}$ cm

3. Quelle est la nature du triangle AGE ?
Calculer la valeur de la longueur de la diagonale [AG] du cube

Le triangle AGE est rectangle en E.
J'utilise le théorème de Pythagore:
$AG^2=EA^2+EG^2$
$AG^2=3^2+18$ (EG=AC)
$AG^2=9+18$
$AG^2=27$
$AG=\sqrt{27}$
$AG=3\sqrt{3}$ cm

4. Déterminer la valeur de x pour laquelle la somme KM+LM soit minimale

Attention, le segment [KL] est intérieur au cube donc ne coupe pas [AB].
On construit partiellement le patron du cube c'est à dire on construit le patron correspondant aux faces (ABCD) et (ABFE).



KM+ML=K'M'+M'L' longueur d'une ligne brisée.
Cette somme est minimale lorsque les 3 points K'; M' et L' sont alignés, c'est à dire lorsque M' est en J point d'intersection de [K'L'] et [A'B'].

On travaille dans le plan du patron.
Les droites (A'K') et (B'L') sont parallèles donc les triangles A'JK' et B'JL' constituent une configuration de Thalès, par conséquent:

$$\frac{JB'}{JA'}=\frac{B'L'}{A'K'}=\frac{JL'}{JK'}$$

Or, A'K'=2 et B'L'=1

$$\frac{JB'}{JA'}=\frac{B'L'}{A'K'}$$

$$\frac{JB'}{JA'}=\frac{1}{2}$$

Donc, JA'=2JB'

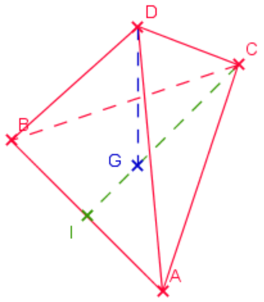
Or, JA'+JB'=A'B'=3
JB'=3-JA'

Par suite:
JA'=2JB'
JA'=2(3-JA')
JA'=6-2JA'
JA'+2JA'=6
3JA'=6
JA'= $\frac{6}{3}=2$

et x=JA=2cm.

EXERCICE 2

1. **Représenter le tétraèdre en perspective cavalière**



2. Calculer CI

Le triangle ABC est équilatéral donc la médiane (AI) est aussi le hauteur issue de A et donc le triangle ACI est rectangle en I.

J'utilise le théorème de Pythagore:

$CA^2=IC^2+IA^2$

$3^2=IC^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$9=IC^2+\frac{9}{4}$

$IC^2=9-\frac{9}{4}$

$IC^2=\frac{27}{4}$

$IC=\sqrt{\frac{27}{4}}$

$IC=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm

3. Calculer l'aire en cm^2 du triangle ABC

$Aire_{ABC}=\frac{AB\times CI}{2}$

$Aire_{ABC}=\frac{3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2}$

$Aire_{ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²

4. Calculer DG

G est le centre de gravité du triangle ABC donc:

$$CG=\frac{2}{3}CI=\frac{2}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,\text{cm}$$

J'utilise le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle DGC:

$DC^2=GD^2+GC^2$

$3^2=GD^2+(\sqrt{3})^2$

$9=GD^2+3$

$GD^2=9-3$

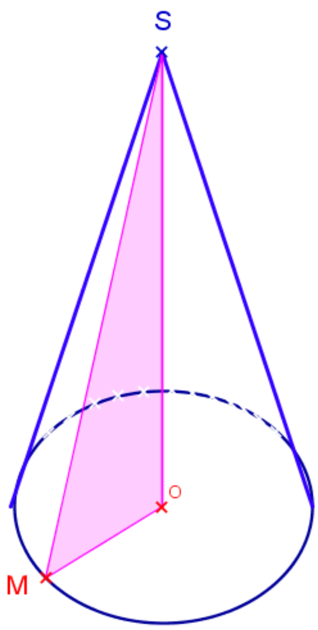
$GD^2=6$
GD= $\sqrt{6}\,\text{cm}$

5. Calculer le volume en cm^3 du tétraèdre

$$\text{Volume}_{\text{tétraèdre}}=\frac{\text{Aire de ABC}\times \text{DG}}{3}=\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{6}}{3}=\frac{9\sqrt{18}}{12}=\frac{3\sqrt{18}}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}\text{cm}^3$$

EXERCICE 3

1. Représenter le cône en perspective cavalière



2. Donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{MSO}$ au degré près

Dans le triangle rectangle MSO:

$$\tan\widehat{MSO}=\frac{OM}{OS}$$

$$\tan\widehat{MSO}=\frac{2}{6}$$

$$\widehat{MSO}\approx 18°$$

3. Calculer le volume du cône en cm^3

$$\text{Volume}_{\text{cône}}=\frac{\pi\times r^2\times SO}{3}$$

$$\text{Volume}_{\text{cône}}=\frac{\pi\times 2^2\times 6}{3}$$

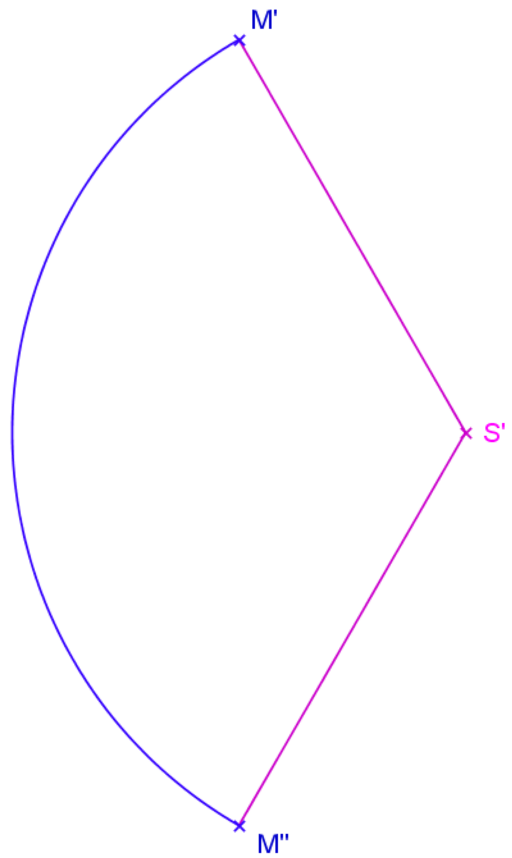
$\text{Volume}_{\text{cône}}=8\pi$

$\text{Volume}_{\text{cône}}\approx 25{,}13\,\text{cm}^3$

4. Calculer l'aire latérale en cm^2 du cône

Le périmètre de la base est: $2\pi r=4\pi$

Le patron de la surface latérale st un secteur angulaire.



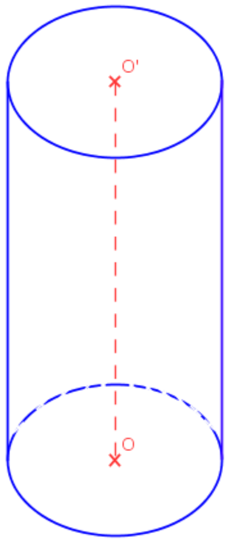
Dans le triangle rectangle SOM, j'utilise le théorème de Pythagore:
$SM^2=OS^2+OM^2$
$SM^2=6^2+2^2$
$SM^2=36+4$
$SM^2=40$
SM= $\sqrt{40}$
SM= $2\sqrt{10}$ cm
L'arc de cercle M'M'' est un arc de cercle de centre S' et de rayon $2\sqrt{10}$

$\text{Aire}_{\text{latérale du cône}}= \pi\times r\times SM$
$\text{Aire}_{\text{latérale du cône}}= \pi\times 2\times 2\sqrt{10}$
$\text{Aire}_{\text{latérale du cône}}= 4\sqrt{10}\pi$

$\text{Aire}_{\text{latérale du cône}}\approx 39{,}74\text{cm}^2$

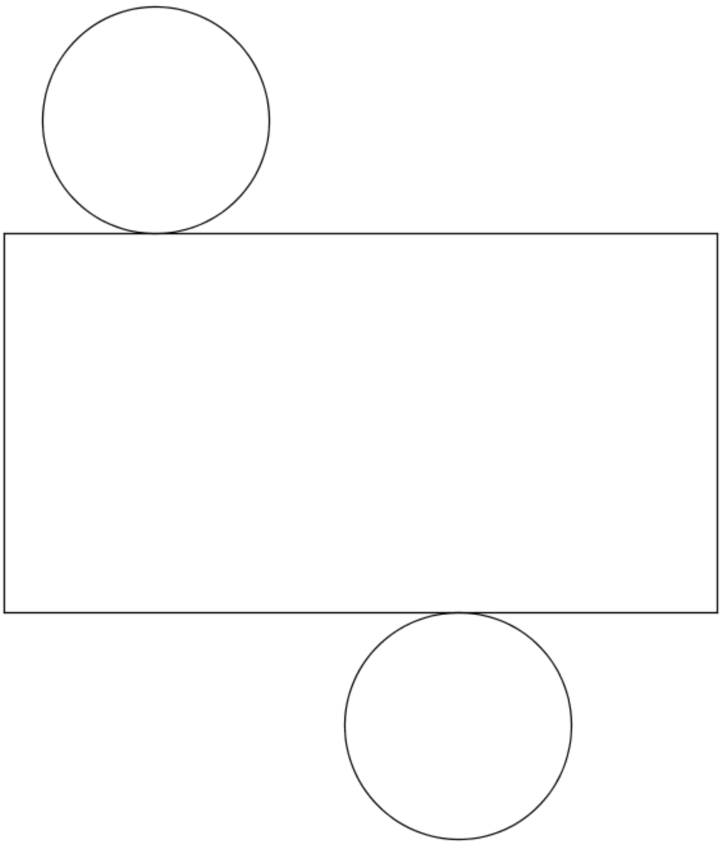
EXERCICE 4

1. Représenter le cylindre en perspective cavalière



2. Construire le patron

Le périmètre de la base= $2\pi r=2\pi\times1{,}5=3\pi\approx9{,}42\,\text{cm}$



3. Calculer le volume en cm^3 du cylindre

Volume du cylindre= $\pi\times r^2\times h=\pi\times(1{,}5)^2\times5=11{,}25\pi\approx35{,}34\,\text{cm}^3$

4. Calculer l'aire totale du cylindre en cm^3

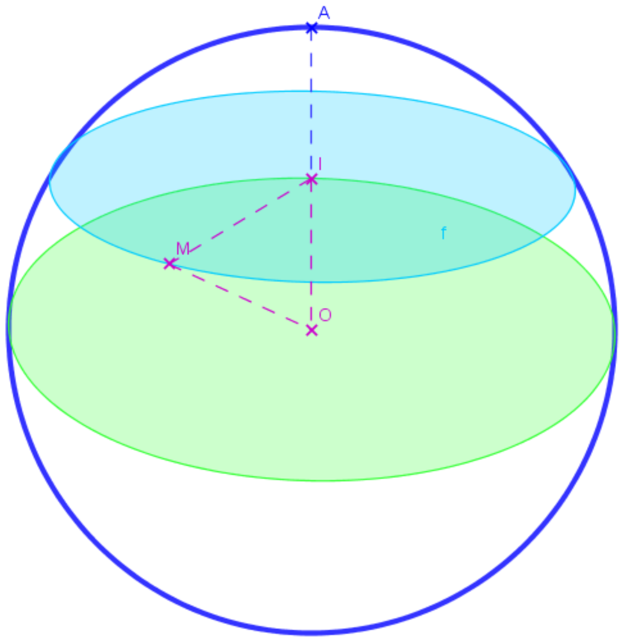
Aire latérale= $3\pi\times5=15\pi\,cm^2$

Aire des 2 disques= $2\times\pi\,r^2=2\times\pi\times(1{,}5)^2=4{,}5\,\pi\,cm^2$

Aire totale= $15\pi+4{,}5\,\pi=19{,}5\pi\approx61{,}26\,cm^2$

EXERCICE 5

1. Représenter la sphère en perspective cavalière



2. Calculer le volume en cm^3 de la sphère

$\text{Volume}_{\text{sphère}}=\dfrac{4\times\pi\times4^3}{3}=\dfrac{256\,\pi}{3}\approx268{,}08\,cm^3$

3. Calculer l'aire de la sphère

$\text{Aire}_{\text{sphère}}=4\times\pi\times4^2=64\,\pi\approx201{,}06\,cm^2$

3. Calculer le rayon r en cm du cercle de centre I

Dans le triangle rectangle moi, j'utilise le théorème de Pythagore:

$OM^2=MI^2+OI^2$

$4^2=MI^2+2^2$

$MI^2=16-4$

$MI^2=12$

$MI=\sqrt{12}$

$MI\approx2\sqrt{3}\,cm$

$MI\approx3{,}46cm$

EXERCICE 6

1. Calculer les longueurs AF et DF

- [AF] est une diagonale du carré ABFE de côté 5cm.
  En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABF rectangle en B on obtient :

$AF^2 = AB^2 + BF^2 = 5^2 + 5^2 = 50$
$AF = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ cm

- Le triangle ADF est rectangle en A (la droite (AD) est orthogonale à toute droite contenue dans le plan (ABF)).
  En utilisant le théorème de Pythagore :
  $DF^2 = AD^2 + AF^2 = 5^2 + 50 = 75$
  $DF = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm

2. Calculer la longueur OM en cm

Dans le triangle ADF, O est le milieu de [DF] et M est le milieu de [AD], donc la droite (OM) est parallèle à la droite (AF) et $OM = \frac{1}{2} AF$.

$OM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm.

EXERCICE 7

Calculer la longueur ON

Dans le triangle (DEF), O est le milieu de [DF] et N est le milieu de [DE], donc la droite (ON) est parallèle à la droite (EF) et $ON = \frac{1}{2} EF$.

[EF] est l'un des côtés du cube donc $EF = 5$ cm

$ON = \frac{5}{2}$ cm.