Fiche exercices

EXERCICE 1

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB]. D est un point à l'extérieur du disque de diamètre [AB]. E est le deuxième point d'intersection du cercle et de la droite (AD). F est le deuxième point d'intersection du cercle et de la droite (DB). L est le point d'intersection des droites (AF) et (EB).
Démontrer que les droites (AB) et (DL) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2

ABCD est un carré de côté 8cm et de centre O. E est le point de la demi-droite [AD) tel que AE=10cm. La parallèle à (BD) passant par E coupe (AC) en F.
1. Préciser la nature du quadrilatère ODEF.
2. Calculer le périmètre en cm de ce quadrilatère ODEF (on donnera la valeur exacte)
3. Calculer l'aire en cm² de ce quadrilatère.

EXERCICE 3

1. ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=4cm et la longueur AC est strictement supérieure à 6. I est un point du segment [AC] tel que AI=6cm. On pose IC=x. Calculer x pour que AB+AI soit égal à la moitié du périmètre du triangle ABC.
2. l et k sont deux nombres réels strictement positifs donnés. ABC est un triangle rectangle en A tel que AB=l (cm) et la longueur AC est strictement supérieure à k. $I \in [AC]$ et AI=k. On pose x=IC.
Démontrer que la valeur de x pour que BA+AI soit égal à la moitié du périmètre du triangle ABC vérifie:
$$x=\frac{kl}{2k+l}$$

EXERCICE 4

On considère le triangle ABC tel que BC=8cm, AC=7cm et AB=5cm. I est le milieu de [BC]. On se propose de calculer AI. Soit K le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A (on admet que les points B; K; I et C sont alignés dans cet ordre)

1. En écrivant BK=BI-IK et CK=CI+IK, exprimer BK^2+CK^2 en fonction de KI^2

2. Écrire KI^2 en fonction de AI^2 et AK^2

3. Calculer AI^2 puis AI.

EXERCICE 5

1. Construire un triangle ABC quelconque ayant ses trois angles aigus.

Du point A on trace la droite parallèle d_A à la droite (BC).

Du point B on trace la droite parallèle d_B à la droite (AC).

Du point C on trace la droite parallèle d_C à la droite (AB).

Les droites d_B et d_C sont sécantes en D.

Les droites d_A et d_C sont sécantes en E.

Les droites d_A et d_B sont sécantes en F.

1.a. Démontrer que le point A est le milieu du segment [EF] et le point B est le milieu du segment [DF] et le point C est le milieu du segment [DE].

1.b. Tracer les médiatrices du triangle EDF.

1.c. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

2. Faire les mêmes constructions pour un triangle ABC ayant un angle obtus.

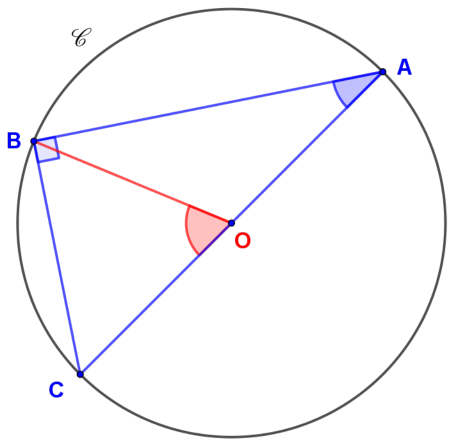
3. Cas particulier du triangle rectangle.

EXERCICE 6

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon quelconque. On dit que l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ lorsque les 3 points A;B et C appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ et que l'angle $\widehat{BAC}$ intercepte l'arc BC.

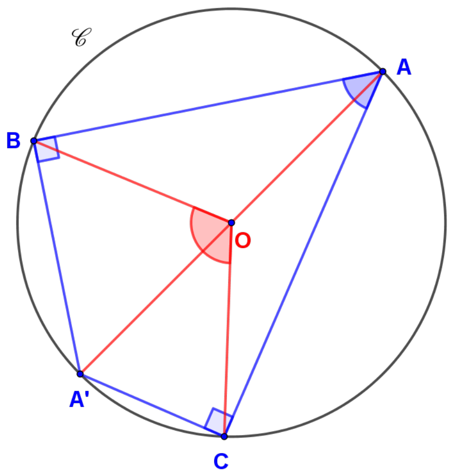
On se propose de démontrer que deux angles inscrits dans le même cercle qui interceptent le même arc ont la même mesure.

1. Le triangle ABC est rectangle en B.



Démontrer ue la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ est le double de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

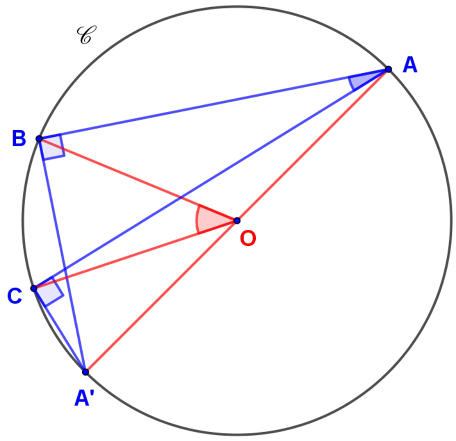
2. Le triangle ABC n'est pas rectangle en B ou C.



A' est le point diamétralement opposé au point A (A' est intérieur à l'angle $\widehat{BAC}$).

Démontrer que la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ est le double de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

3. Le triangle ABC n'est rectangle en B ou C.



A' n'est pas intérieur à l'angle $\widehat{BAC}$.

Démontrer que la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$ est le double de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

4. Conclure.

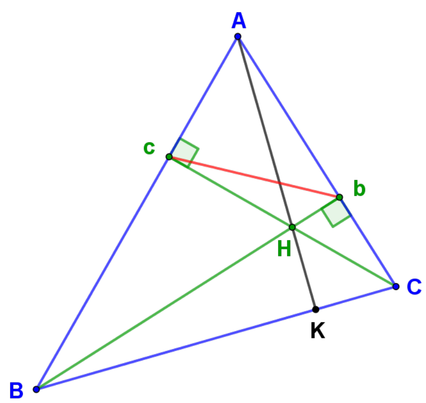
EXERCICE 7

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, on se propose de démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

On considère un triangle ABC (on choisit ses trois angles aigus), (Bb) et (Cc) sont les hauteurs issues respectivement de B et C.

Ces deux hauteurs sont sécantes en H.

On trace la droite (AH) sécante avec (BC) en K, on ne sait pas que (AK) est la hauteur du triangle ABC du triangle ABC issue de A, ceci est le résultat que l'on veut démontrer.



1. Démontrer que les quatre points A, b, H et c en cocycliques c'est à dire qu'il existe un cercle passant par ces quatre points. Que peut-on en déduire pour les angles $\widehat{cAH}$ et $\widehat{cbH}$.

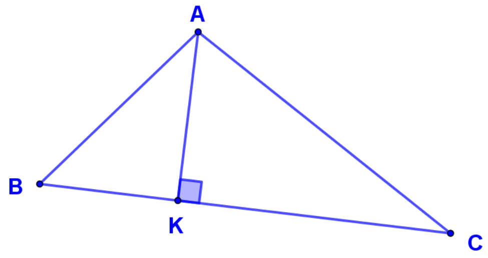
2. Démontrer que les quatre points B,c,b et C sont cocycliques Que peut-on en déduire pour les angles $\widehat{cbB}$ et $\widehat{cCB}$.

3. Conclure.

EXERCICE 8

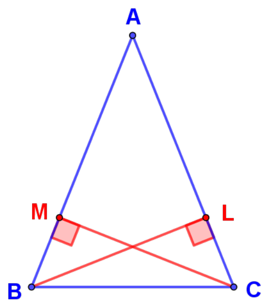
Dans le plan l'unité de longueur est le centimètre et l'unité d'aire est le centimètre carré.

On rappelle que l'aire d'un triangle est égale à $\dfrac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$.



$$\mathscr{A}_{\text{ABC}}=\frac{\text{BC}\times\text{AK}}{2}$$

1. Le triangle ABC est isocèle en A.



Démontrer que $\text{CM}=\text{BL}$.

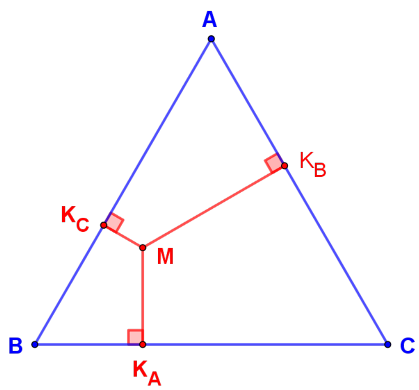
2. ABC est un triangle équilatéral en A.

M est un point quelconque intérieur au triangle ABC.

K_A est le projeté orthogonal dr M sur (BC).

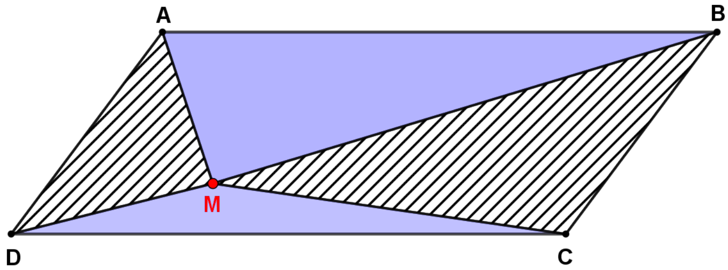
K_B est le projeté orthogonal de M sur (AC).

K_C est le projeté orthogonal de M sur (AB).



Démontrer que la somme : $\text{MK}_\text{A}+\text{MK}_\text{B}+\text{MK}_\text{C}$ est indépendante du point M.

3. ABCD est un parallélogramme, M est un point quelconque intérieur au parallélogramme.



Comparer l'aire de la partie de plan hachurée et l'aire de la partie de plan colorée en bleu.

4. La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle d'un triangle ABC connaissant la longueur de ses trois côtés.

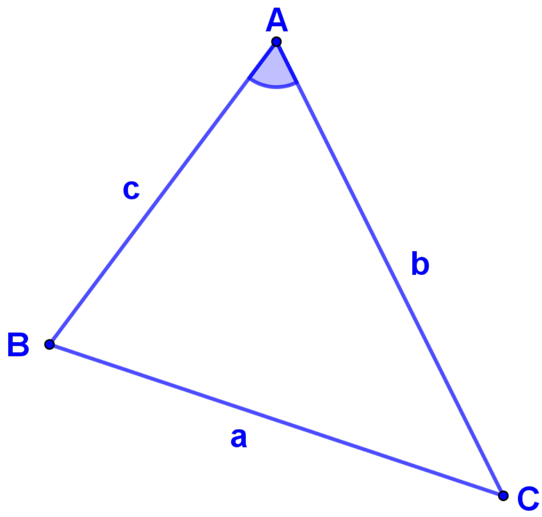
Si on note $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ et $p=\frac{a+b+c}{2}$ (demi périmètre du triangle ABC) alors :

$\mathscr{A}_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Construire un triangle ABC tel que $a=BC=5$ cm, $b=AC=6$ cm et $c=AB=7$ cm.

Calculer l'aire du triangle ABC et la longueur des hauteurs h_A (issue de A), h_B (issue de B) et h_C (issue de C).

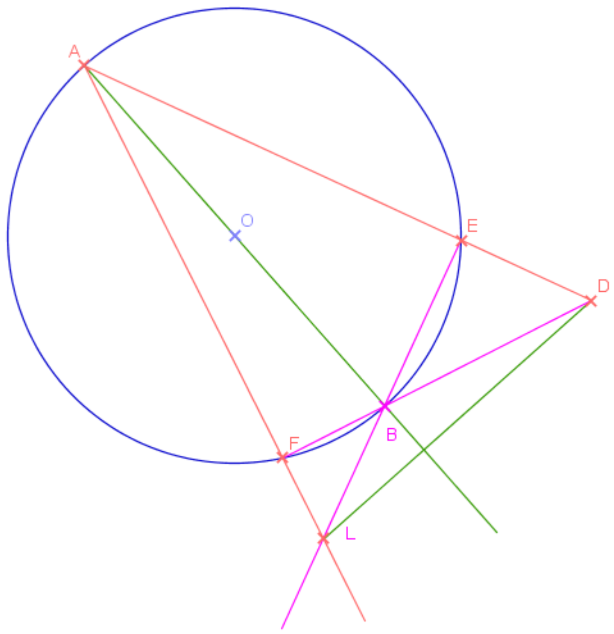
5. Les trois angles du triangle ABC sont aigus.
On note $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$.



Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}bc\sin(\hat{A})$.

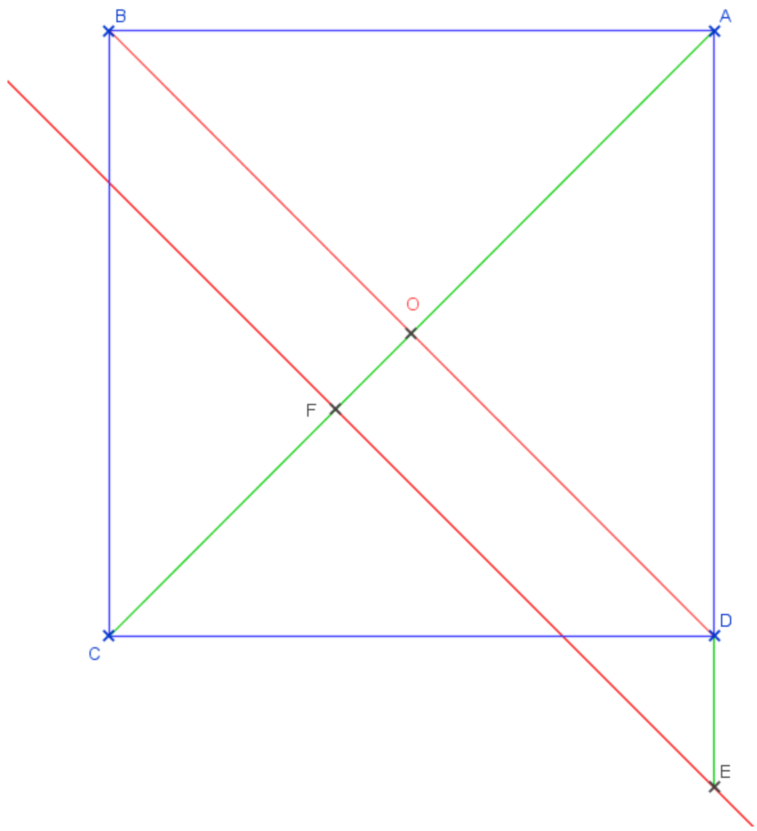
CORRECTION

EXERCICE 1



Le point E est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABE est rectangle en E, par suite:
(EL) est perpendiculaire à (AD).
Le point F est sur le cercle de diamètre [AB] donc le triangle ABF est rectangle en F, par suite:
(DF) est perpendiculaire à (AL).
Dans le triangle ADL:
(EL) passe par le sommet L et (EL) est perpendiculaire au côté (AD) donc (EL) est la hauteur issue de L.
(DF) passe par le sommet D et (DF) est perpendiculaire au côté (AL) donc (DF) est la hauteur issue de D.
Les deux hauteurs se coupent en B donc B est l'orthocentre du triangle ADL.
(AB) passe par le sommet A et l'orthocentre B donc (AB) est la 3$^{\text{ième}}$ hauteur du triangle ADL.
Donc (AB) est perpendiculaire à (DL)

EXERCICE 2



1. Les droites (OD) et (FE) sont parallèles.
Le quadrilatère ODEF a deux côtés opposés parallèles donc ODEF est un trapèze.
Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires donc (BD) et (AC) sont perpendiculaires.
ODEF est un trapèze qui possède un angle droit donc EDEF est un trapèze rectangle.
2. Dans le triangle rectangle BCD, j'utilise le théorème de Pythagore:
$BD^2=CB^2+CD^2$
$BD^2=8^2+8^2$
$BD^2=64+64$
$BD^2=128$
BD= $\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu donc $OD=\frac{BD}{2}=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$

Les points A, O, F sont alignés.

Les points A, D, E sont alignés.

Les droites (OD) et (FE) sont parallèles.

Donc d'après le théorème de Thalès:

$$\frac{AO}{AF}=\frac{AD}{AE}=\frac{OD}{FE}$$

$\frac{AO}{AF}=\frac{AD}{AE}$

$\frac{4\sqrt{2}}{AF}=\frac{8}{10}$

$AF=\frac{10\times4\sqrt{2}}{8}$

$AF=5\sqrt{2}\,cm$

$\frac{AD}{AE}=\frac{OD}{FE}$

$\frac{8}{10}=\frac{4\sqrt{2}}{FE}$

$FE=\frac{10\times4\sqrt{2}}{8}$

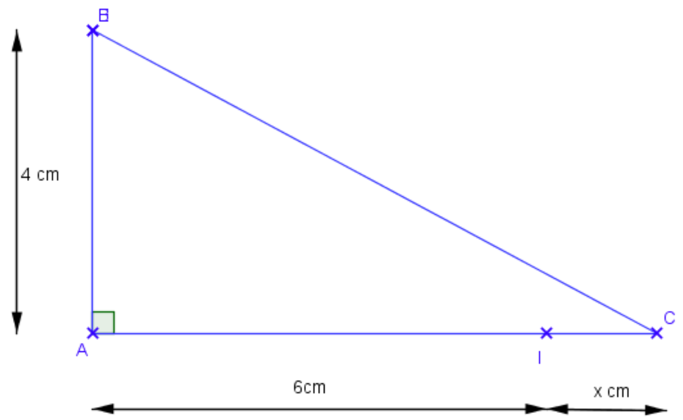
$FE=5\sqrt{2}\,cm$

OF=AF-AO
OF= $5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\sqrt{2}$

Périmètre de ODEF=OD+DE+EF+FO
Périmètre de ODEF= $4\sqrt{2}+2+5\sqrt{2}+\sqrt{2}$
Périmètre de ODEF= $10\sqrt{2}+2\,cm$

3. Aire du trapèze ODEF= $\frac{(OD+FE)\times OF}{2}=\frac{(4\sqrt{2}+5\sqrt{2})\times\sqrt{2}}{2}=\frac{9\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2}=9cm^2$

EXERCICE 3



1.

Dans le triangle rectangle ABC, j'utilise le théorème de Pythagore:

$BC^2=AB^2+AC^2$

$BC^2=4^2+(6+x)^2$

$BC^2=16+6^2+2\times6\times x+x^2$

$BC^2=16+36+12x+x^2$

$BC^2=x^2+12x+52$

Périmètre de ABC=AB+BC+CA

AB+AI=10=moitié du périmètre du triangle ABC, donc BC+IC=10

$BC+x=10$

$BC=10-x$

$BC^2=(10-x)^2$

$BC^2=10^2-2\times x\times10+x^2$

$BC^2=100-20x+x^2$

Il faut donc:

$x^2+12x+52=x^2-20x+100$

$x^2+12x-x^2+20x=100-52$

$32x=48$

$x=\frac{48}{32}=1{,}5\,\text{cm}$

2.

Dans le triangle rectangle ABC, j'utilise le théorème de Pythagore:

$BC^2=AB^2+AC^2$

$BC^2=l^2+(k+x)^2$

$BC^2=l^2+k^2+2\times k\times x+x^2$

$BC^2=l^2+k^2+2kx+x^2$

Périmètre de ABC=AB+BC+CA

AB+AI=l+k=moitié du périmètre du triangle ABC, donc BC+IC=l+k

$BC+x=l+k$

$BC=l+k-x$

$BC^2=(l+k-x)^2$

$BC^2=(l+k)^2-2\times(l+k)\times x+x^2$

$BC^2=l^2+2lk+k^2-2lx-2kx+x^2$

Il faut donc:

$l^2+k^2+2kx+x^2=l^2+2lk+k^2-2lx-2kx+x^2$

$x^2+2kx+2lx+2kx-x^2=l^2+2lk+k^2-l^2-k^2$

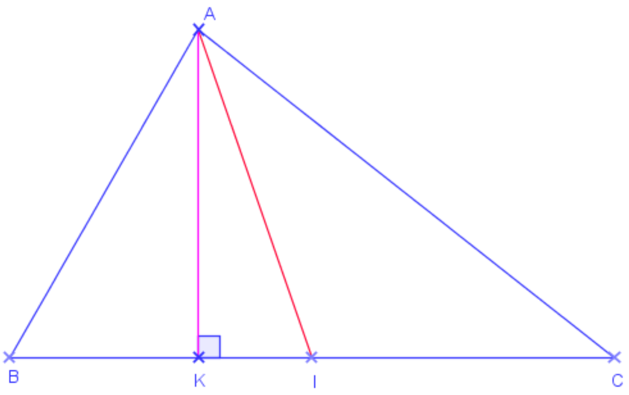
$4kx+2lx=2lk$

$x(4k+2l)=2lk$

$x=\frac{2lk}{4k+2l}$

$x=\frac{lk}{2k+l}$

EXERCICE 4



1. $BK=BI-IK$ et $CK=CI+IK$,

BK^2+CK^2

$=(BI-IK)^2+(CI+IK)^2$

$=BI^2-2BI\times IK+IK^2+CI^2+2CI\times IK+IK^2$

$=4^2-2\times4\times IK+IK^2+4^2+2\times4\times IK+IK^2$

$=16-8IK+IK^2+16+8IK+IK^2$

$=32+2IK^2$

2.

Dans le triangle rectangle IKA, j'utilise le théorème de Pythagore

$AI^2=KA^2+KI^2$

$KI^2=AI^2-KA^2$

3.

BK^2+CK^2

$=32+2IK^2$

$=32+2(AI^2-KA^2)$

$BK^2+CK^2=32+2AI^2-2KA^2$

$BK^2+2KA^2+CK^2=32+2AI^2$

Dans le triangle rectangle AKB, j'utilise le théorème de Pythagore

$AB^2=KA^2+KB^2=5^2=25$

Dans le triangle rectangle AKC, j'utilise le théorème de Pythagore

$AC^2=KA^2+KC^2=7^2=49$

$BK^2+2KA^2+CK^2=32+2AI^2$

$BK^2+KA^2+KA^2+CK^2=32+2AI^2$

$25+49=32+2AI^2$

$2AI^2=25+49-32$

$2AI^2=74-32$

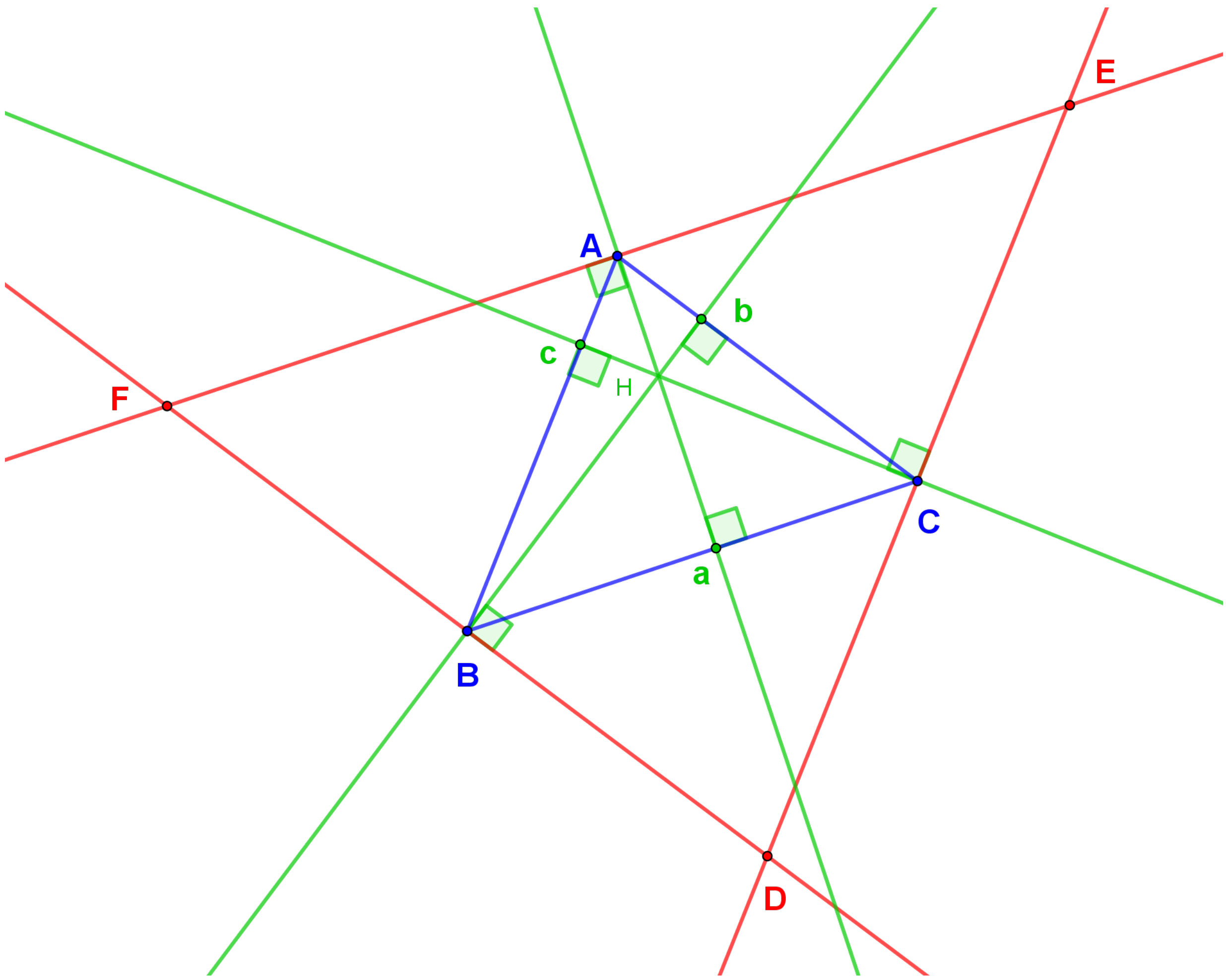
$2AI^2=42$

$AI^2=\dfrac{42}{2}=21$

AI= $\sqrt{21}$ cm

EXERCICE 5

1.a.



- Les quadrilatères ABCE et ACBF sont des quadrilatères non aplatis ayant leurs côtés opposés parallèles deux à deux. Ces quadrilatères sont des parallélogrammes.
  Donc BC=AE=AF, les points A, E et F sont alignés et A est le milieu de [EF].
- De même les quadrilatères ABCF et ACDB sont des parallélogrammes et AC=BF=BD, les points B, D et F sont alignés donc B est le milieu de [DF].
- De même les quadrilatères ABDC et ABCE sont des parallélogrammes et AB=BF=BD, les points D, C et E sont alignés donc C est le milieu de [DE].

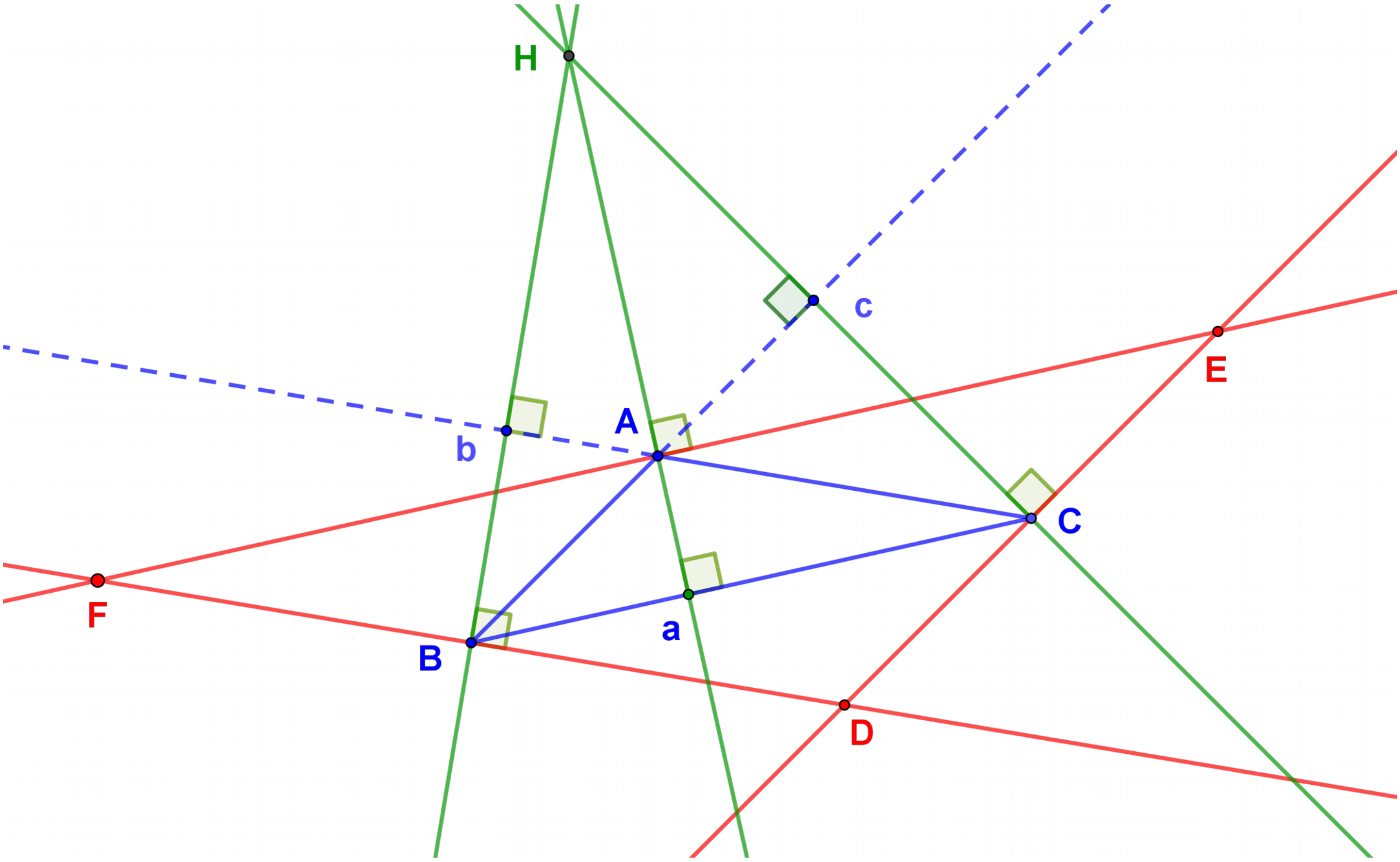
1.b. La médiatrice de [EF] est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (FE).
La médiatrice de [DF] est la droite passant par B et perpendiculaire à la droite (DF).
La médiatrice de [DE] est la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (DE).

1.c. Les droites (EF) et (BC) sont parallèles, la médiatrice de [EF] passe par A et est perpendiculaire à (BC) donc cette droite est la hauteur du triangle ABC issue de A.

- Les droites (DF) et (AC) sont parallèles, la médiatrice de [DF] passe par B et est perpendiculaire à (AC) donc cette droite est la hauteur du triangle ABC issue de B.

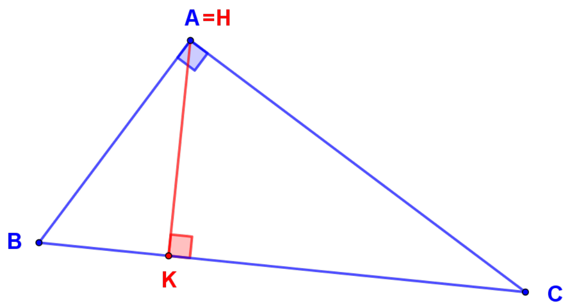
- Les droites (DE) et (AB) sont parallèles, la médiatrice de [DE] passe par C et est perpendiculaire à (AB) donc cette droite est la hauteur du triangle ABC issue de C.
- Conséquence
  Les trois médiatrices du triangle DEF sont concourantes en H, donc les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H (orthocentre du triangle ABC).

2.



L'orthocentre du triangle ABC est extérieur au triangle.

3. Le triangle ABC est rectangle en A.
La hauteur du triangle issue de B est la droite (BA).
La hauteur du triangle issue de C est la droite (CA).
La hauteur du triangle issue de A est la droite (AK).
L'orthocentre du triangle ABC est alors le sommet A.



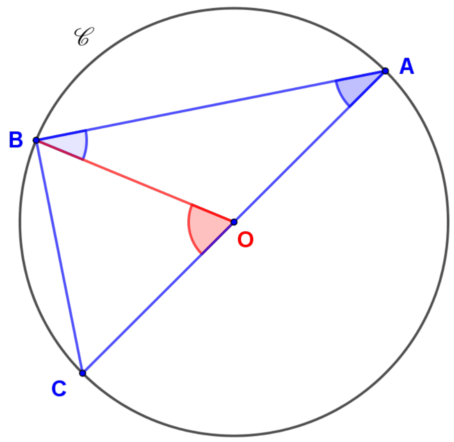
EXERCICE 6

1. Le triangle OAB est isocèle en A (OA=OB rayons du cercle $\mathscr{C}$), donc $\widehat{OBA}=\widehat{OAB}$.
La somme des angles du triangle ABC est égale à 180° donc :
$\widehat{AOB}+\widehat{OBA}+\widehat{OAB}=180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOB}+2\widehat{OAB}=180^\circ \Leftrightarrow \widehat{AOB}=180^\circ-2\widehat{OAB}$.
les points A, O et C sont alignés donc les angles $\widehat{COB}$ et $\widehat{AOB}$ sont supplémentaires c'est à dire
$\widehat{COB}+\widehat{AOB}=180°\Leftrightarrow \widehat{COB}=180°-\widehat{AOB}$.

<u>Conséquence</u>

$\widehat{COB} = 180° - (180° - 2\widehat{OAB}) = 2\widehat{OAB}$

Les points A,O et C sont alignés dans cet ordre donc $\widehat{OAB} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{COB} = 2\widehat{CAB}$.



<u>Conclusion</u>

L'angle inscrit $\widehat{CAB}$ dans le cercle 𝒞 a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{COB}$ qui intercepte le même arc.

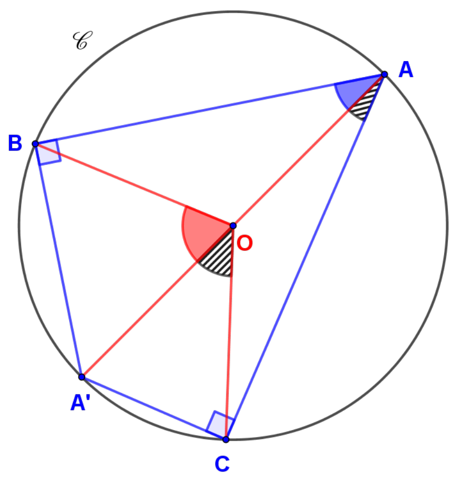
2. [AA'] est un diamètre du cercle 𝒞, B et C appartiennent au cercle 𝒞 donc les triangles ABA' et ACA' sont rectangles respectivement en B et en C.

A' est intérieur à l'angle $\widehat{ABC}$ donc $\widehat{BAC} = \widehat{BAA'} + \widehat{A'AC}$.

En utilisant le résultat de la première question, on a : $\widehat{BOA'} = 2\widehat{BAA'}$ et $\widehat{A'OC} = 2\widehat{A'AC}$.

<u>Conséquence</u>

$\widehat{BOC} = \widehat{BOA'} + \widehat{A'OC} = 2\widehat{BAA'} + 2\widehat{A'AC} = 2(\widehat{BAA'} + \widehat{A'AC}) = 2\widehat{BAC}$



<u>Conclusion</u>

L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ dans le cercle 𝒞 a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ qui intercepte le même arc.

3. [AA'] est un diamètre du cercle 𝒞, B et C appartiennent au cercle 𝒞 donc les triangles ABA' et ACA' sont rectangles respectivement en B et C.

A' est extérieur à l'angle $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{BAA'} - \widehat{CAA'}$.

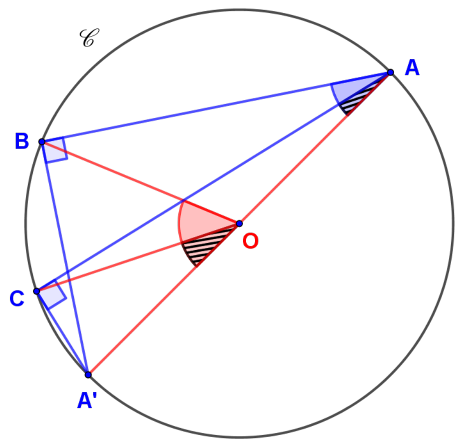
En utilisant le résultat de la première question, on a :

$\widehat{BOA'} = 2\widehat{BAA'}$ et $\widehat{COA'} = 2\widehat{CAA'}$.

<u>Conséquence</u>

$\widehat{BOC} = \widehat{BOA'} - \widehat{A'OC} = 2\widehat{BAA'} - 2\widehat{A'AC} = 2(\widehat{BAA'} - \widehat{A'AC}) = 2\widehat{BAC}$

Soit $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$.

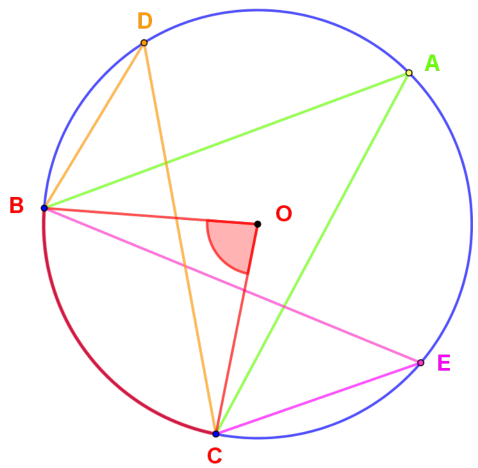


Conclusion

L'angle inscrit $\widehat{BAC}$ dans le cercle 𝒞 a pour mesure la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{BOC}$ qui intercepte le même arc.

4. Théorème

Deux angles inscrits dans le même cercle 𝒞, interceptant le même arc sont égaux.

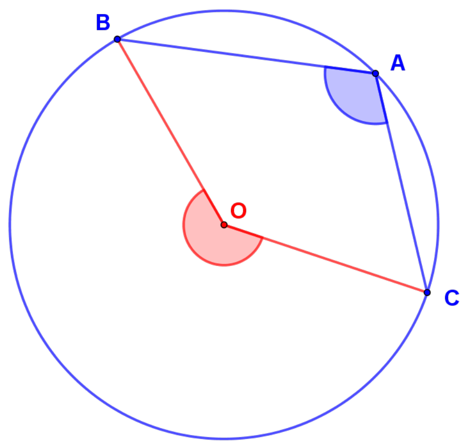


A, B, C, D et E appartiennent au même cercle de centre O.

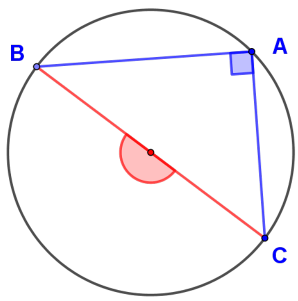
$$\widehat{BDC}=\widehat{BAC}=\widehat{BEC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}$$

Remarques

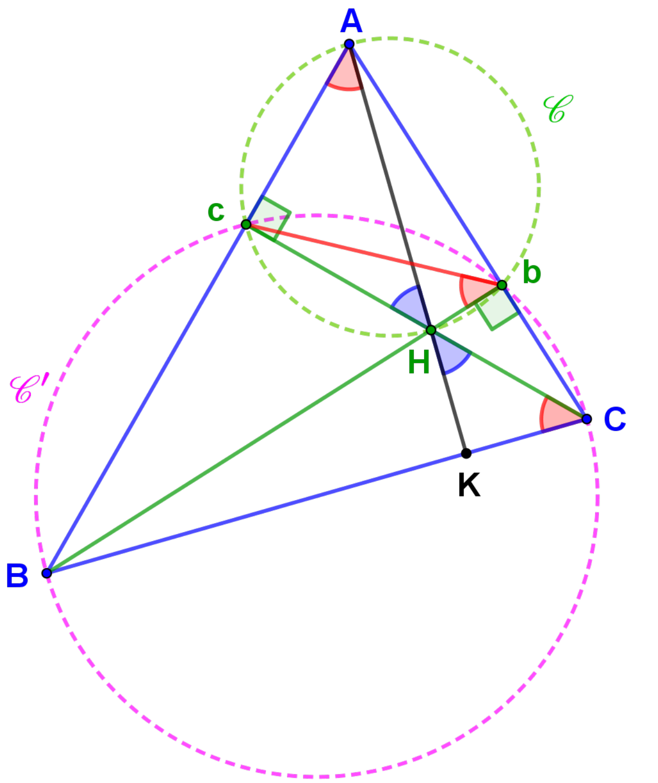
. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est un angle obtus alors l'angle au centre interceptant le même arc est rentrant.



. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est un an gle droit alors l'angle au centre interceptant le même arc est un angle plat.



EXERCICE 7



1. On considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AH].
Le triangle AHc est rectangle en c donc le point c appartient au cercle $\mathscr{C}$.
Le triangle AHb est rectangle en b donc le point b appartient au cercle $\mathscr{C}$.
Les points A, H, c et b sont cocycliques.
Les angles $\widehat{cAH}$ et $\widehat{cbH}$ sont des angles inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$ et interceptant le même arc donc :
$\widehat{cAH}=\widehat{cbH}$.

2. On considère le cercle $\mathscr{C}'$ de diamètre [BC].
Le triangle BCc est rectangle en c donc le point c appartient au cercle $\mathscr{C}'$.
Les points B, C c et b sont cocycliques.
Les angles $\widehat{cbB}$ et $\widehat{cCB}$ sont des angles inscrits dans le cercle $\mathscr{C}'$ et interceptant le même arc donc :
$\widehat{cbB}=\widehat{cCB}$.

3. Les points b,H et B sont alignés dans cet ordre donc $\widehat{cbH}=\widehat{cbB}$.
Conséquence : $\widehat{cAH}=\widehat{cCB}=\widehat{HCK}$.
- Les angles $\widehat{AHc}$ et $\widehat{CHK}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{AHc}=\widehat{CHK}$.
- Les angles $\widehat{cAH}$ et $\widehat{ACH}$ sont complémentaires dans le triangle AHc .

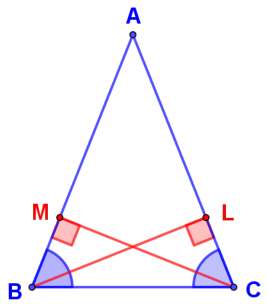
Donc les angles $\widehat{HCK}$ et $\widehat{CHK}$ sont complémentaires dans le triangle CHK.
Et l'angle $\widehat{CKH}=180\,°-90\,°=90\,°$

- Conclusion
  (AK) est la hauteur du triangle ABC issue de A.
  Les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

EXERCICE 8

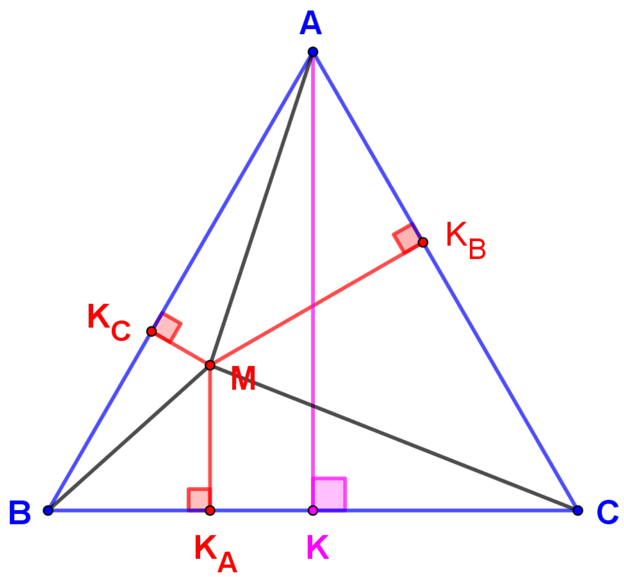
1. Le triangle ABC est isocèle en A donc AB=AC
$\mathscr{A}$ est l'aire du triangle (en cm^2).
Or $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times AB\times CM$ et $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times AC\times BL$.
Conséquence
$\frac{1}{2}\times AB\times CM=\frac{1}{2}\times AC\times BL \Leftrightarrow AB\times CM=AC\times BL \Leftrightarrow CM=BL$.

- On peut aussi justifier ce résultat en utilisant la trigonométrie dans un triangle rectangle.



Le triangle ABC est isocèle en A donc $\hat{B}=\hat{C}$.
Dans le triangle rectangle BCM rectangle en M : $\sin(\hat{B})=\frac{CM}{BC}$.
Dans le triangle rectangle BCL rectangle en L : $\sin(\hat{C})=\frac{BL}{BC}$.
Conséquence
$\hat{B}=\hat{C}$ donc $\sin(\hat{B})=\sin(\hat{C})$ et $\frac{CM}{BC}=\frac{BL}{BC} \Leftrightarrow CM=BL$

2. ABC est un triangle équilatéral $AB=AC=BC=a$



On partage le triangle ABC en trois triangles AMB ; AMC et BMC.

L'aire du triangle AMB est égale à $\frac{1}{2}\times AB\times MK_C$, l'aire du triangle AMC est égale à $\frac{1}{2}\times AC\times MK_B$ et l'aire du triangle BMC est égale $\frac{1}{2}\times BC\times MK_A$.

La somme des aires de ces trois triangles est égale à l'aire du triangle C soit $\frac{1}{2}\times BC\times AK$.

On obtient : $\frac{1}{2}\times AB+MK_C+\frac{1}{2}\times AC\times MK_B+\frac{1}{2}\times BC\times MK_A=\frac{1}{2}\times BC\times AK$

$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\times a\times(MK_C+MK_B+MK_A)=\frac{1}{2}\times BC\times AK = \frac{1}{2}\times a\times AK$

$\Leftrightarrow\quad MK_A+MK_B+MK_C=AK$.

Pour calculer AK on considère le triangle AKB rectangle en K.

$AB=a \qquad BK=\frac{a}{2}$ (car K est le milieu de [BC]).

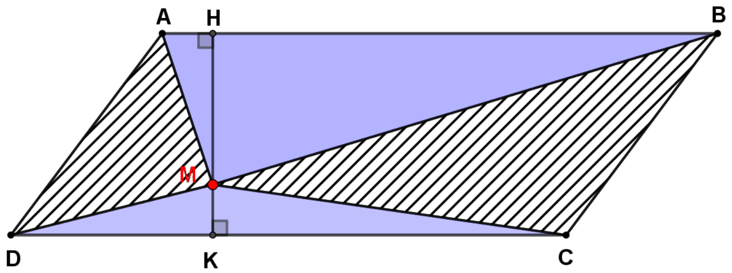
On utilise le théorème de Pythagore.

$AB^{¿}AK^2+BK^2 \quad\Leftrightarrow\quad a^2=AK^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad\Leftrightarrow\quad AK^2=a^2-\frac{a}{4}=\frac{3a^2}{4} \quad\Leftrightarrow\quad AK=\frac{\sqrt{3}a}{2}$

Conclusion

Pour tout point M intérieur au triangle ABC, $MK_A+MK_B+MK_C=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **.**

3.



MH est la hauteur du triangle AMB issue de M.
MK est la hauteur du triangle CMD issue de M.
HK est la hauteur du parallélogramme ABCD passant par M relative à la base [AB]

$\mathcal{A}_{AMB} = \frac{1}{2}\times AB\times MH \qquad \mathcal{A}_{CMD} = \frac{1}{2}\times CD\times MK$ or AB=CD.

Donc l'aire de la partie de plan colorée en bleu est égale à :

$\mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{CMD} = \frac{1}{2}\times AB\times(MH+MK)=\frac{1}{2}\times AB\times HK$ car $MH+MK=HK$.

L'aire du parallélogramme ABCD est : $\mathcal{A}_{ABCD} = AB\times HK$.

Donc $\mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{CMD} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}$.

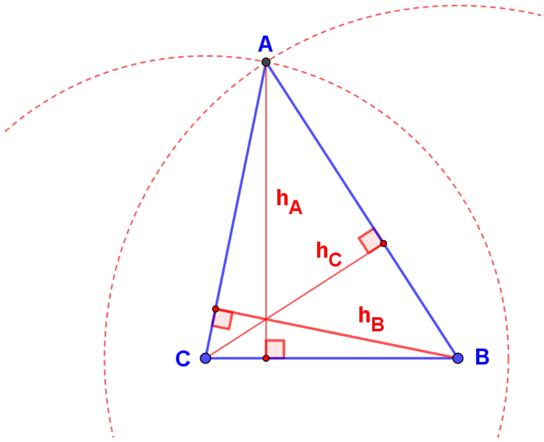
Conclusion

L'aire de la partie colorée en bleu est égale à l'aire dela partie hachurée.

Remarque

Le point H peut-être extérieur au parallélogramme **ou** le point K peut être extérieur au parallélogramme.

4. BC=a=5 cm AC=b=6 cm AB=c=7 cm.
On trace le segment [BC] de longueur 5 cm, puis le cercle de centre C et de rayon 6 cm et le cercle de centre B et de rayon 7 cm. On choisit pour A l'un des points d'intersection des deux cercles.
On trace les trois hauteurs du triangle ABC.



$a+b+c=18 \qquad p=9 \qquad p-a=4 \qquad p-b=3 \qquad p-c=2$

$\mathscr{A}_{ABC}=\sqrt{9\times4\times3\times2}=\sqrt{36\times6}=6\times\sqrt{6}\ \ cm^2=$ **14,70** cm^2 à 10^{-2} près

$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times BC\times h_A$

$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times5\times h_A \quad\Leftrightarrow\quad h_A=\frac{12\sqrt{6}}{5}=$ **5,88 cm** à 10^{-2} près

$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times h_B$

$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times6\times h_B \quad\Leftrightarrow\quad h_B=\frac{6\sqrt{6}}{3}=2\sqrt{6}=$ **4,90 cm** à 10^{-2} près

$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times h_C$

$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times7\times h_C \quad\Leftrightarrow\quad h_C=\frac{12\sqrt{6}}{7}=$ **4,20 cm** à 10^{-2} près.

5. On trace la hauteur du triangle issue de B.
On note I le pied de cette hauteur

$\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BI$.

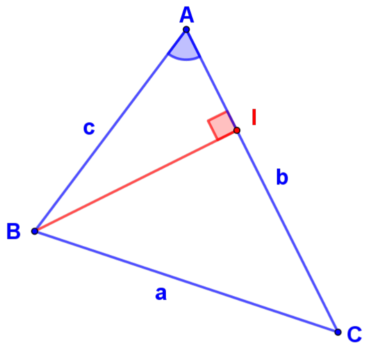
Dans le triangle ABI rectangle en I.

$\sin(\hat{A})=\frac{BI}{AB}$ donc $BI=AB\sin(\hat{A})$

et $\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times AB\times\sin(\hat{A})$

or $AC=b$ et $AB=c$

donc $\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin(\hat{A})$



Remarque

On démontre de même : $\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin(\hat{B})$ et $\mathscr{A}_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin(\hat{C})$.

On peut écrire :

$\frac{2}{bc}\mathscr{A}_{ABC}=\sin(\hat{A})$ $\frac{2}{ac}\mathscr{A}_{ABC}=\sin(\hat{B})$ $\frac{2}{ab}\mathscr{A}_{ABC}=\sin(\hat{C})$.

On obtient :

$$\frac{2}{abc}\mathscr{A}_{ABC}=\frac{\sin(\hat{A})}{a}=\frac{\sin(\hat{B})}{b}=\frac{\sin(\hat{C})}{c}$$

Lorsque l'un des angles est obtus, par exemple si $\hat{A}$ est obtus son supplément $\hat{A}'$ est un angle aigu et on admettra que $\sin(\hat{A})=\sin(\hat{A}')$ et ont obtient le même résultat.