Intervalles dans l'ensemble des réels

1. Activité p2

2. Intervalles dans l'ensemble des réels p5

1. Activité

1.1.Enoncé

Dans un lycée, on considère un groupe de 40 élèves de première étudiant au moins l'une de langues étrangères. suivantes : Anglais, Allemand, Espagnol.

Dans ce groupe :

- 16 élèves étudient l'anglais et l'allemand
- 11 élèves étudient l'allemand et l'espagnol
- 19 élèves étudient l'anglais et l'espagnol
- 6 élèves étudient l'allemand et l'espagnol et l'anglais
- 37 élèves étudient l'allemand ou l'espagnol.
- 39 élèves étudient l'anglais ou l'allemand.

Questions

1. *Combien d'élèves étudient l'anglais ?*
2. *Combien d'élèves étudient l'allemand ?*
3. *Combien d'élèves étudient l'espagnol ?*

1.2. Remarques

1. Les élèves peuvent étudier d'autres langues que les 3 langues citées.
2. Parmi les 16 élèves étudiant l'anglais et l'allemand, il y a 6 élèves l'anglais et l'allemand et l'espagnol.
3. Parmi les 40 élèves du groupe, 37 étudient l'allemand ou l'espagnol donc les 3 autres n'étudient que l'anglais parmi les 3 langues citées.

1.3. Notations

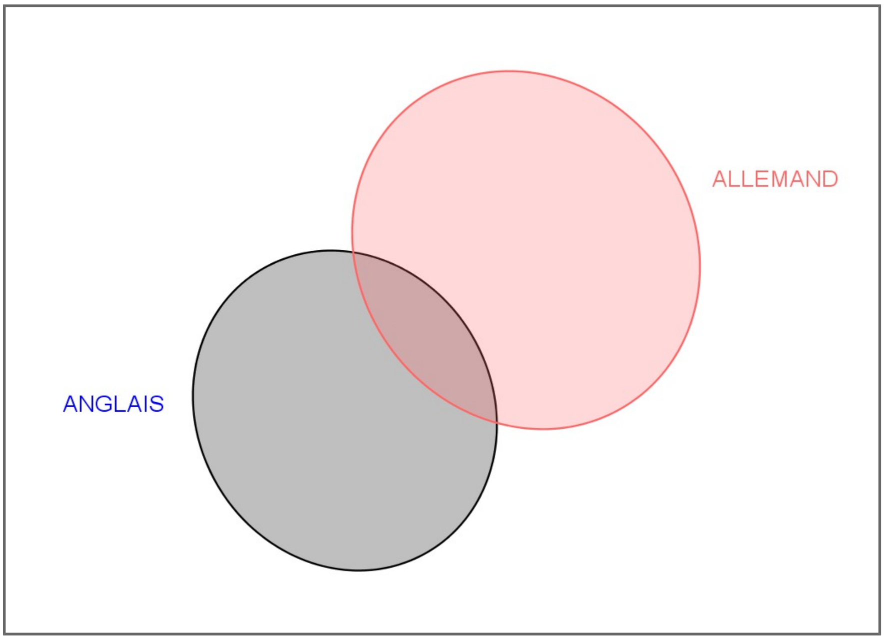
Notation générale :

- ✔ A_n : l'ensemble des élèves étudiant l'anglais.
- ✔ A_l : l'ensemble des élèves étudiant l'allemand.
- ✔ E : l'ensemble des élèves étudiant l'espagnol

Réunion

- ✔ $A_n \cup A_l$ ($\cup$ est le symbole de la réunion).

$A_n \cup A_l$ est l'ensemble des élèves étudiant l'anglais **ou** l'allemand **ou** les deux.
Le nombre d'élèves appartenant à $A_n \cup A_l$ est 39. On peut dire aussi le cardinal de l'ensemble $A_n \cup A_l$ est 39.
La partie colorée en rose ou en bleu ou les deux représente $A_n \cup A_l$



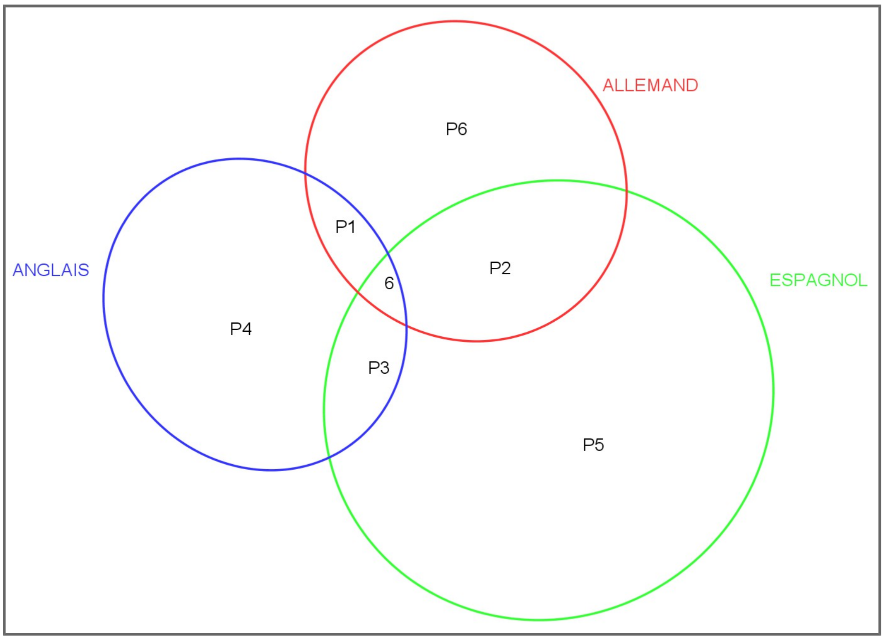
Intersection

- ✔ $A_n \cap A_l$ ($\cap$ est le symbole de l'intersection).

$A_n \cap A_l$ est l'ensemble des élèves étudiant l'anglais **et** l'allemand.
Le nombre d'élèves appartenant $A_n \cap A_l$ est 16.
La partie colorée en violet représente $A_n \cap A_l$

1.4. Résolution

On effectue une partition de l'ensemble des 40 élèves en considérant le diagramme suivant :



- ✔ P1 : les élèves étudiant l'anglais **et** l'allemand **et n'**étudiant **pas** l'espagnol.
- ✔ P2 : les élèves étudiant l'allemand **et** l'espagnol **et n'**étudiant **pas** l'anglais.
- ✔ P3 : les élèves étudiant l'anglais **et** l'espagnol **et n'**étudiant **pas** l'allemand.
- ✔ P4 : les élèves étudiant l'anglais **et n'**étudiant **pas** l'espagnol **et n'**étudiant **pas** l'allemand.

- ✔ P5 : les élèves étudiant l’espagnol **et n’**étudiant **pas** l’anglais **et n’**étudiant **pas** l’allemand.
- ✔ P6 : les élèves étudiant l’allemand **et n’**étudiant **pas** l’espagnol **et n’**étudiant **pas** l’anglais.

Calcul de P1

On sait qu'il y a 16 élèves étudiant l’anglais et l’allemand dont 6 étudiant les 3 langues.

Donc 16 – 6 = 10 élèves étudient l’anglais et l’allemand et n’ étudient pas l’espagnol.

Calcul de P2

On sait qu'il y a 11 élèves étudiant l’allemand et l’espagnol dont 6 étudiant les 3 langues.

Donc 11 – 6 = 5 élèves étudient l’allemand et l’espagnol et n’ étudiant pas l’anglais.

Calcul de P3

On sait qu'il y a 19 élèves étudient l’anglais et l’espagnol dont 6 étudiant les 3 langues.

Donc 19 – 6 = 13 élèves étudient l’anglais et l’espagnol et n’ étudiant pas l’allemand.

Calcul de P4

De même 40 – 37 = 3 élèves étudient l’anglais et n’ étudiant pas l’espagnol et n’ étudiant pas l’allemand.

Calcul de P5

De même 40 – 39 = 1 élève étudie l’espagnol et n’ étudiant pas l’anglais et n’ étudiant pas l’allemand.

Calcul de P6

De même 40 – 6 – 10 – 5 – 13 – 3 – 1 = 2 élèves étudient l’allemand et n’ étudiant pas l’espagnol et n’ étudiant pas l’anglais.

Conclusion

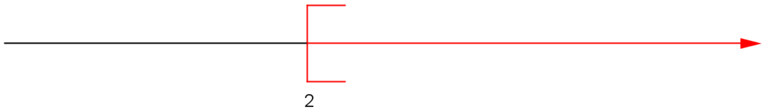
1. *Il y a 10 + 6 + 13 + 3 = 32 élèves étudiant l'anglais.*
2. *Il y a 13 + 6 + 5 +1 = 25 élèves étudiant l'espagnol.*
3. *Il y a 10 + 6 + 5 + 2 = 23 élèves étudiant l'allemand.*

2. Les intervalles de $\mathbb{R}$

2.1. Intersection d'intervalles

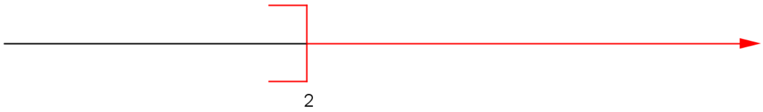
Définition 1

L’ensemble des solutions dans ℝ de l’inéquation $2 \leq x$ se note $[2\,;+\infty[$ et se nomme l’intervalle ***fermé*** « deux, plus infini ». On lit le symbole « + ∞ » : plus infini.



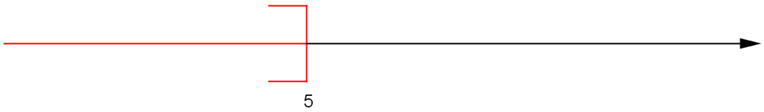
Définition 2

L’ensemble des solutions dans ℝ de l’inéquation $2 < x$ se note $]2\,;+\infty[$ et se nomme l’intervalle ***ouvert*** « deux, plus infini ».



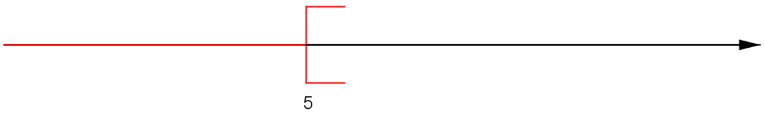
Définition 3

L’ensemble des solutions dans ℝ de l’inéquation $x \leq 5$ se note $]-\infty\,;5]$ et se nomme l’intervalle ***fermé*** « moins l'infini, cinq ». On lit le symbole « - ∞ » : moins l' infini.



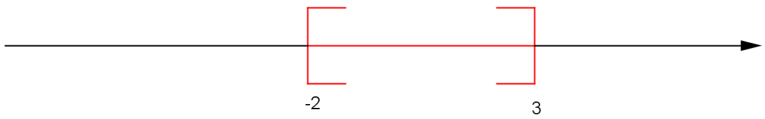
Définition 4

L’ensemble des solutions dans ℝ de l’inéquation $x < 5$ se note $]-\infty\,;5[$ et se nomme l’intervalle ***ouvert*** « moins l'infini, cinq ».



Définition 5

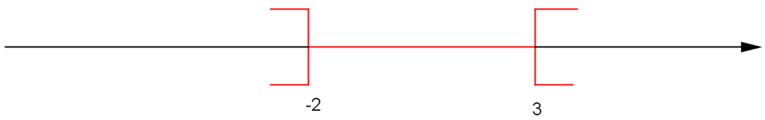
L’ensemble des solutions dans ℝ de l’inéquation $x \leq 3$ **et de** $-2 \leq x$ (c'est à dire l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations) se note $[-2\,;3]$ et se nomme l’intervalle ***fermé*** « moins deux, trois ».



Donc : $]-\infty;3] \cap [-2;+\infty[= [-2\,;3]$

Définition 6

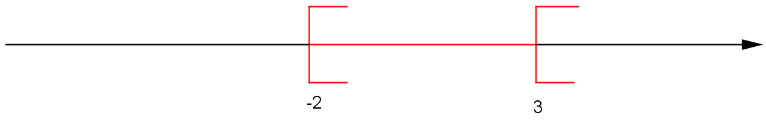
L’ensemble des solutions dans ℝ de l’inéquation $x < 3$ **et de** $-2 < x$ (c'est à dire l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations) se note $]-2\,;3[$ et se nomme l’intervalle ***ouvert*** « moins deux, trois ».



Donc : $]-\infty;3[\cap]-2;+\infty[=]-2\,;3[$

Définition 7

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x<3$ **et de** $-2\leq x$ (c'est à dire l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations) se note $[-2\,;3[$ et se nomme l'intervalle ***semi ouvert*** « moins deux, trois, trois exclu ».



Donc : $]-\infty;3[\cap[-2;+\infty[\,=[-2\,;3[$

Définition 8

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x\leq 3$ **et de** $-2<x$ (c'est à dire l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations) se note $]-2\,;3]$ et se nomme l'intervalle ***semi ouvert*** « moins deux , trois, moins deux exclu ».

Donc : $]-\infty;3]\cap]-2;+\infty[\,=\,]-2\,;3]$

Définition 9

Il n'existe pas de solutions communes aux deux inéquations $x\leq -3$ **et de** $2\leq x$. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x\leq -3$ **et de** $2\leq x$ (c'est à dire l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations) se note $\emptyset$ et se nomme ensemble vide.

Donc : $]-\infty;-3]\cap[2;+\infty[\,=\emptyset$

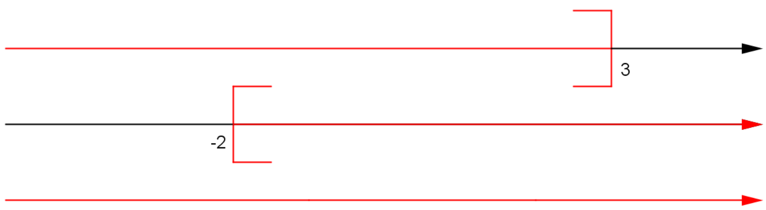
Définition 10

On note l'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}=\ ]-\infty;+\infty[$

2.2. Réunion d'intervalles

Définition 11

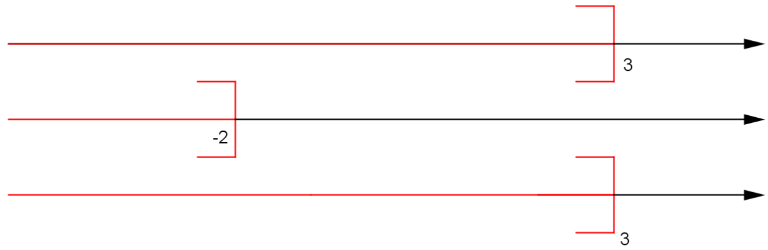
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x\leq 3$ **ou de** $-2\leq x$ se note $]-\infty\,;3]\cup[-2\,;+\infty[$



Donc : $]-\infty;3]\cup[-2;+\infty[\,=\,]-\infty\,;+\infty[$

Définition 12

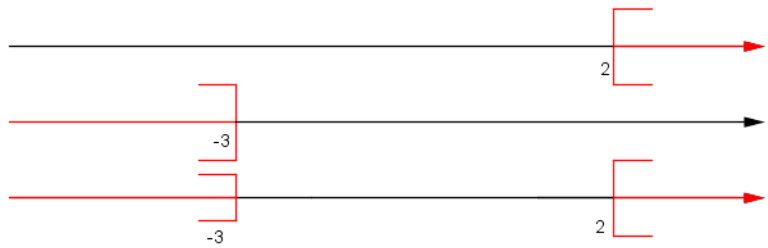
L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x\leq 3$ **ou de** $x\leq -2$ se note $]-\infty\,;3]\cup]-\infty\,;-2]$



Donc : $]-\infty;3]\cup[-\infty;-2]=]-\infty;3]$

Définition 13

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x\leq -3$ **ou de** $2\leq x$ se note $]-\infty;-3]\cup[2;+\infty[$



On ne peut pas écrire cette réunion d'intervalles sous la forme d'un seul intervalle. Dans la partie précédente, (**définition 9**), on a vu que $]-\infty;-3]\cap[2;+\infty[=\emptyset$

On dit que les deux intervalles sont ***disjoints***

Définition 14

L'ensemble des nombres réels non nuls se note $\mathbb{R}^*$ et aussi $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ (réunion de deux intervalles disjoints).

Remarque

Ou est une préposition de coordination.

Dans notre premier exemple, « les élèves étudiant l'anglais **ou** l'allemand », ces élèves peuvent :

- ✔ Etudier l'anglais **et ne pas** étudier l'allemand. (Il y a 16 élèves dans ce cas).
- ✔ Etudier l'allemand **et ne pas** étudier l'anglais. (Il y a 7 élèves dans ce cas).
- ✔ Etudier l'anglais **et** l'allemand. (Il y a 16 élèves dans ce cas).

Dans ce cas, on utilise le **ou** dans le sens ***inclusif*.**

Si on considère maintenant le cas $x\leq -3$ **ou** $2\leq x$ il y a disjonction entre les deux possibilités :

Soit on a $x\leq -3$ soit on a $2\leq x$ mais on ne peut pas avoir les deux possibilités en même temps. Dans ce cas on utilise le **ou** dans le sens ***exclusif*.**