Isométries planes

1. Introduction

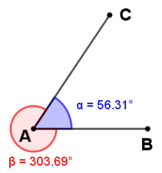
1.1. Préambule

L'utilisation du logiciel géogébra permet d'effectuer rapidement les images de points, bipoints, segments, droites, angles, triangles et cercles par les transformations : translations, rotations , symétries axiales …
On se propose de déterminer des propriétés de ces transformations et de composer ces transformations.
On précisera le vocabulaire et on effectuera des conjectures en considérant les constructions géométriques sans calculs.
Dans le plan, on choisit une unité de longueur (par exemple le centimètre) et pour unité de mesure des le degré.

1.2. Mesures d'angles

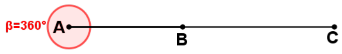
1.2.a. Mesures d'angles non orientés

- Soient trois points du plan non alignés.
  Ils existent deux angles $\widehat{BAC}$ l'un saillant l'autre rentrant.



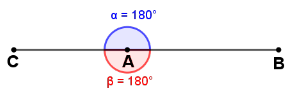
Géogébra nous donne une valeur approchée au centième de degré près de l'angle saillant et de l'angle rentrant. La somme des deux mesures est égale à 360°.

- Si A,B et C sont alignés avec $A \neq B$ et $A \neq C$ et A n'appartenant pas au segment [BC].



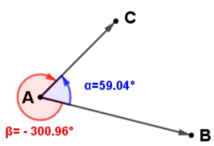
$\alpha = 0°$ et $\beta = 360°$

- Si A, B et C sont alignés avec $A \neq B$ et $A \neq C$ et A appartient au segment [BC].



1.2.b. Mesures en degré d'angles orientés

Le logiciel géogébra propose lorsque l'on donne une mesure d'un angle deux sens : le sens antihoraire (le sens inverse du déplacement des aiguilles d'une montre) ou le sens horaire (sens du déplacement des aiguilles d'une montre).
Orienter le plan, c'est choisir l'un des sens que l'on nomme sens positif (ou sens trigonométrique).
Nous choisissons comme sens positif le sens antihoraire.
La mesure de l'angle orienté est égale à la mesure donnée par géogébra dans le sens antihoraire et l'opposé dans le sens horaire.

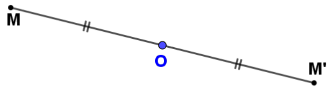


On notera $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 59{,}04°$ ou $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = -300{,}96$

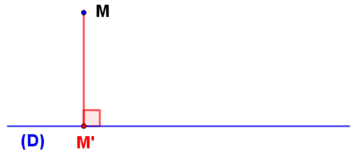
1.3. Transformations du plan

Soit f une application du plan P vers le plan P qui au point M associe $f(M)=M'$ (on donne un procédé géométrique permettant de déterminer M' à partir du point M).
S'il existe une application g de P vers P qui au point M' associe le point M, on dit que f est une transformation du plan P et on note $g = f^{-1}$.
<u>Exemples</u>

- Une symétrie centrale est une transformation du plan.
  s_O est la symétrie centrale de centre O, pour tout point M du plan $s_O(M)=M'$ tel que O est le milieu de [MM'].



  L'image de M' par s_O est le point M donc s_O est une transformation du plan et $s_O^{-1}=s_O$.
- Une projection orthogonale sur une droite n'est pas une transformation du plan.



  Tous les points de la perpendiculaire à (D) passant par M ont pour image le point M'.
  Il n'existe pas d'application de P vers P qui au point M' associe le point M, donc une projection orthogonale n'est pas une transformation.

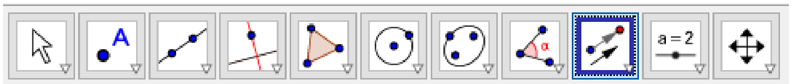
1.4. Composition des applications

On considère f et g deux applications de P vers P.
Pour tout point M du plan, $f(M)=M_1$ et $g(M_1)=M_2$, l'application H qui au point M associe le point $H(M)=M_2$ se nomme composée des applications f et g, on note H=gof.
$H(M)=(gof)(M)=g[f(M)]=g(M_1)=M_2$

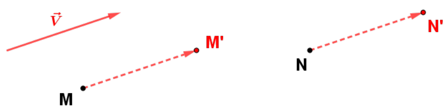
2. Translations

2.1. Définition

$\vec{V}$ est un vecteur fixé du plan.
L'application $t_{\vec{V}}$ de P vers P qui au point M associe le point $t_{\vec{V}}(M)=M'$ tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{V}$ se nomme translation de vecteur $\vec{V}$.
Utilisation de géogébra

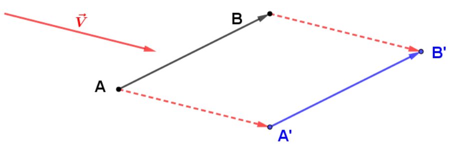


L'icône encadrée en bleu est l'icône de la translation.
On représente le vecteur $\vec{V}$ (en rouge sur la figure suivante) puis on place les points M et N.
L'icône translation étant entouré en bleu, on pointe le point M puis le vecteur $\vec{V}$ et on obtient le point M' de même pour le point N.



Remarque
$\overrightarrow{MM'}=\vec{V}$ donc $\overrightarrow{M'M}=-\vec{V}$, l'application qui au point M' associe le point M est la translation de vecteur $-\vec{V}$. $t_{\vec{V}}$ est une transformation du plan et $t_{\vec{V}}^{-1}=t_{-\vec{V}}$.

2.2. Image d'un bipoint



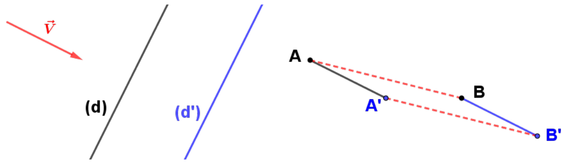
On place les points A et B et on construit les points A’ et B’.

$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\vec{V}$ donc la quadrilatère AA’BB’ est un parallélogramme.

Conséquence

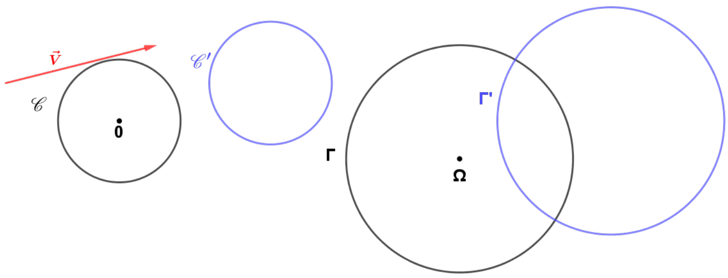
$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$

2.3. Image d’une droite et image d’un segment



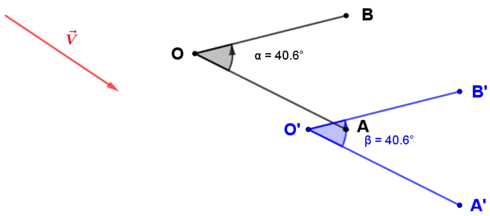
L’image d’une droite est une droite parallèle.
L’image du segment [AB] est le segment [A’;B’] donc (AB) et (A’B’) sont parallèles et A’B’=AB.
Une translation conserve les distances, on dit qu’une translation est **une isométrie.**

2.4. Image d’un cercle

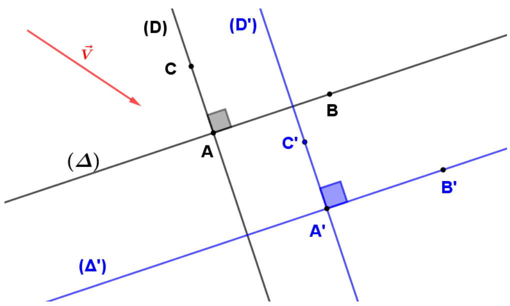


L’image d’un cercle est un cercle de même rayon.
Pour obtenir les centres des cercles images, il suffit de construire les images O et Ω .

2.5. Image d’un angle orienté

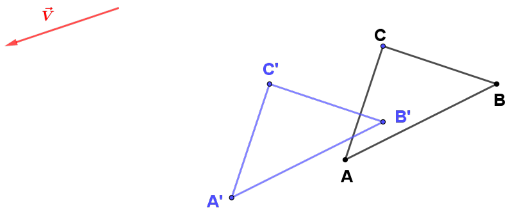


On construit les images des segments [AB] et [CD] puis on mesure les angles orientés.
L’image d’un angle orienté est un angle orienté de même mesure.
Conséquence
si deux droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires alors les droites (D’) et (Δ') sont perpendiculaires.
On dit qu’une translation **conserve l’orthogonalité.**



$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})=90^{\circ}$

2.6. Image d’un triangle



A'B'=AB A'C'=AC B'C'=BC

L'image d'un triangle par une translation est un triangle « égal ».

Nous utiliserons le vocabulaire : **triangle isométrique.**

2.7. Composée de deux translations

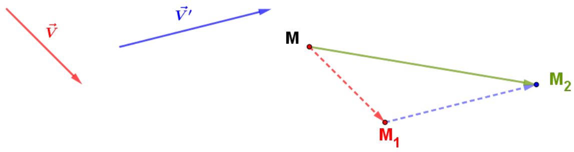
$\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont deux vecteurs du plan fixés.

Pour tout point M du plan : $t_{\vec{V}'} o\, t_{\vec{V}}(M) = t_{\vec{V}'}[t_{\vec{V}}(M)] = t_{\vec{V}'}(M_1) = M_2$

$t_{\vec{V}}(M) = M_1$ donc $\overrightarrow{MM_1} = \vec{V}$ et $t_{\vec{V}'}(M_1) = M_2$ donc $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V}'$

On obtient $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V} + \vec{V}'$

$t_{\vec{V}'} o\, t_{\vec{V}}$ est la translation de vecteur $\vec{V} + \vec{V}'$

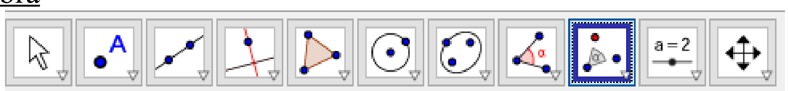


3. Rotations

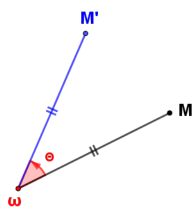
3.1.Définition

ω est un point fixé du plan, θ est un nombre réel appartenant à l'intervalle]-180;180].
On nomme rotation de centre ω et d'angle de mesure θ l'application R du plan P vers le plan P qui au point ω associe le point ω et pour point M du plan distinct de ω associe le point M' tel que : $\omega M' = \omega M$ et $(\overrightarrow{\omega M};\overrightarrow{\omega M'}) = \theta$

Utilisation de géogébra



L'icône encadrée en bleu est l'icône de la rotation.
On place les points ω et M et précise la mesure de l'angle ici on choisit 40° dans le sens anti horaire.



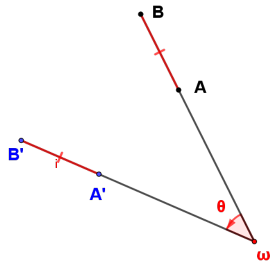
Remarque

L'application f qui au point M' associe le point M est la rotation de centre ω et d'angle de mesure $-\theta$ donc R est une transformation du plan et R^{-1} est la rotation de centre ω et d'angle de mesure $-\theta$.

3.2. Image d'un segment

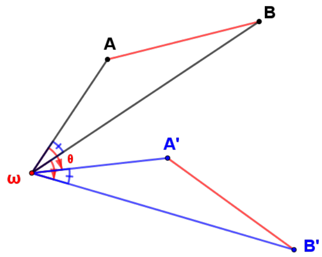
On considère les deux points distincts A et B.
R(A)=A' R(B)=B'

- Si ω, A et B sont alignés alors ω, A' et B' sont alignés.
  $\omega A'=\omega A$ et $\omega B'=\omega B$ donc A'B'=AB .



Pour la figure $\theta=40°$

- Si les points ω, A et B ne sont pas alignés alors ω, A' et B' ne sont pas alignés.



Pour la figure $\theta=-50°$

$(\overrightarrow{\omega A};\overrightarrow{\omega B})=(\overrightarrow{\omega A};\overrightarrow{\omega A'})+(\overrightarrow{\omega A'};\overrightarrow{\omega B'})+(\overrightarrow{\omega B'};\overrightarrow{\omega B})=\ \theta+(\overrightarrow{\omega A'};\overrightarrow{\omega B'})-\theta$

$(\overrightarrow{\omega A};\overrightarrow{\omega B})=(\overrightarrow{\omega A'};\overrightarrow{\omega b'})$

donc $\widehat{A\omega B}=\widehat{A'\omega B'}$ et on a $\omega A'=\omega A$ et $\omega B'=\omega B$.

Les triangles $\omega A'B'$ et ωAB sont « égaux ».

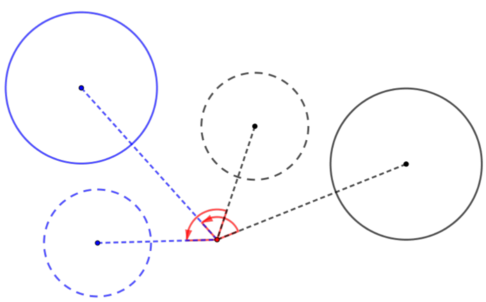
<u>Conséquence</u>

A'B'=AB

L'image d'un segment par une rotation est un segment de même longueur.

Une rotation est une **isométrie.**

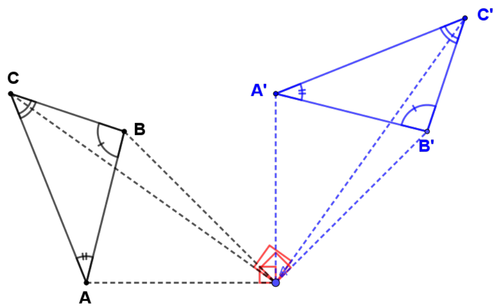
3.3 Image d'un cercle



Pour la figure $\theta=110°$

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.

3.4. Image d'un triangle

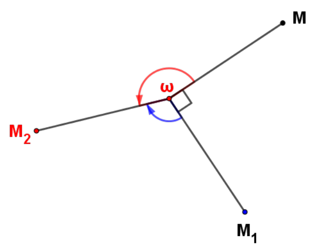


Pour la figure $\theta=-90°$
L'image d'un triangle est un triangle isométrique (Les côtés sont égaux deux à deux).
Conséquences
Une rotation conserve les angles non orientés par exemple $\widehat{B'A'C'}=\widehat{BAC}$.
Une rotation conserve l'orthogonalité.

3.5. Composée de deux rotations de même centre

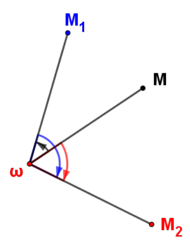
R est la rotation de centre ω et d'angle de mesure θ .
R' est la rotation de centre ω et d'angle de mesure θ'.
On veut déterminer R'oR
$R'oR(\omega)=R'[R(\omega)]=R'(\omega)=\omega$
Pour tout point M du plan distinct de ω.
$R'oR(M)=R'[R(M)]=R'(M_1)=M_2$
$R(M)=M_1 \quad M\neq\omega \quad \omega M=\omega M_1 \quad (\overrightarrow{\omega M};\overrightarrow{\omega M_1})=\theta$
$R(M_1)=M_2 \quad M_1\neq\omega \quad \omega M_1=\omega M_2 \quad (\overrightarrow{\omega M_1};\overrightarrow{\omega M_2})=\theta'$
$R'oR(M)=M_2 \quad \omega M=\omega M_2 \quad (\overrightarrow{\omega M};\overrightarrow{\omega M_2})=(\overrightarrow{\omega M};\overrightarrow{\omega M_1})+(\overrightarrow{\omega M_1};\overrightarrow{\omega M_2})=\theta+\theta'$
$R'oR$ est une rotation de centre ω .

Exemples
. $\theta=-90°$ et $\theta'=-110°$ et $\theta+\theta'=-200°$



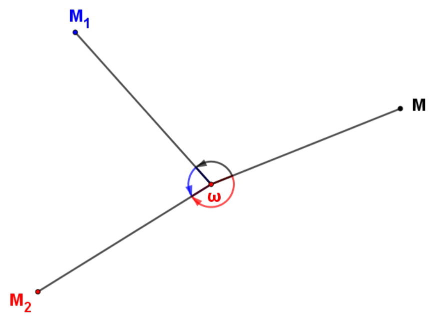
Une mesure de l'angle de la rotation $R'oR$ est 360°-200°= **160°**

. $\theta=40°$ et $\theta'=-100°$ et $\theta+\theta'=-60°$



Une mesure de l'angle de la rotation $R'oR$ est **-60°**

. $\theta=110°$ et $\theta'=80°$ et $\theta+\theta'=190°$



Une mesure de l'angle de la rotation $R'oR$ est 190°-360+= **-170°.**

Conclusion

- $-180° < \theta \leqslant 180°$ et $-180° < \theta' \leqslant 180°$ donc $-360° < \theta + \theta' \leqslant 360°$
- Si $-360° < \theta + \theta' \leqslant -180°$ alors $0 < \theta + \theta' + 360° \leqslant 180°$
  la mesure de l'angle de la rotation $R'oR$ est $\theta + \theta' + 360°$.
- Si $-180° < \theta + \theta' \leqslant 180°$ alors la esure de l'angle de la rotation $R'oR$ est $\theta + \theta'$.
- Si $180° < \theta + \theta' \leqslant 360°$ alors $-180° < \theta + \theta' - 360° \leqslant 0$
  la mesure de l'angle de la rotation $R'oR$ est $\theta + \theta' - 360°$.
- cas particulier
  Si $\theta + \theta' = 0$ alors $R'oR$ est l'application identique c'est à dire pour tout point M du plan on a : $R'oR(M) = M$.

3.6. Remarques

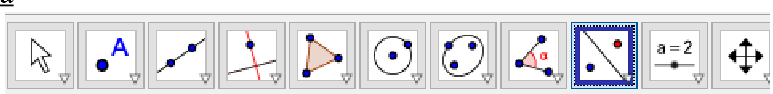
On précisera ultérieurement l'image d'une droite, l'image d'un bipoint, l'image d'un angle orienté et la composée de deux rotations de centres distincts.

4. Symétrie orthogonale par rapport à une droite

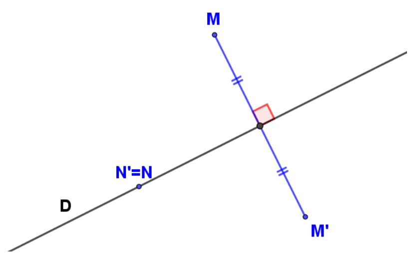
4.1. Définition

D est une droite fixée du plan.
On nomme symétrie orthogonale par rapport à la droite D (ou réflexion d'axe D), l'application S_D du plan P vers le plan P qui au point M associe le point $S_D(M) = M'$ tel que :
. Si M appartient à la droite D alors $M' = M$.
. Si M n'appartient pas à la droite D alors D est la médiatrice de [MM'].

En utilisant géogébra



L'icône encadrée en bleu est l'icône de la symétrie orthogonale par rapport à une droite.
On trace la droite D puis on place les points M et N.L'icône de la symétrie orthogonale étant entouré en bleu , on pointe le point M puis la droite D et on obtient le point M'.

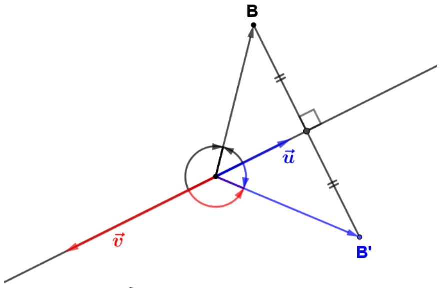


Remarque

D est la médiatrice de [M';M] et $S_D(N') = N$, l'application qui au point M' associe M est la sytérie orthogonale par rapport à la droite D.
S_D est une transformation du plan et $S_D^{-1} = S_D$, on dit que S_D est **une application involutive.**

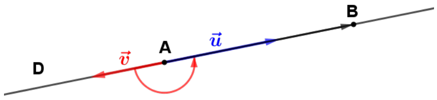
4.2. Image d'un bipoint

- 1^{er} cas
  A appartient à la droite D et B n'appartient pas à la droite D.
  $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite D de sens contraires.

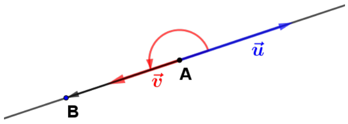


L'image du bipoint $\overrightarrow{AB}$ est le bipoint $\overrightarrow{A'B'}$.
$A'B'=AB$ et $(\vec{u};\overrightarrow{A'B'})=-(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ et $(\vec{v};\overrightarrow{A'B'})=-(\vec{v};\overrightarrow{AB})$

<u>Remarques</u>
Si B appartient aussi à D et $A\neq B$ alors $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.

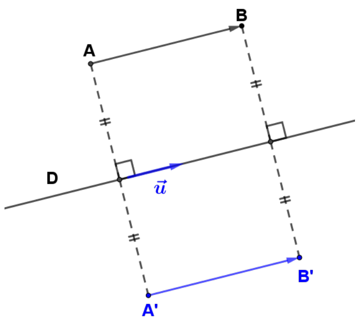


$(\vec{u};\overrightarrow{AB})=0°$ $(\vec{v};\overrightarrow{AB})=180°$.

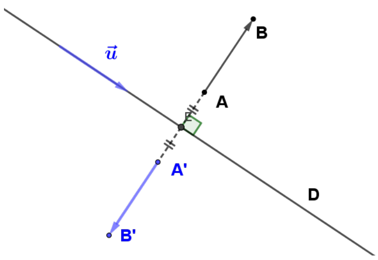


$(\vec{u};\overrightarrow{AB})=180°$ $(\vec{v};\overrightarrow{AB})=0°$.

- <u>Cas particuliers</u>
  $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$.

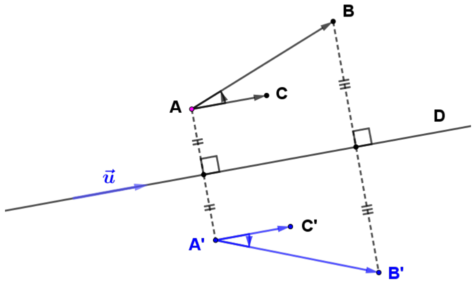


ABB'A' est un rectangle donc $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AB}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.



$\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{AB}$

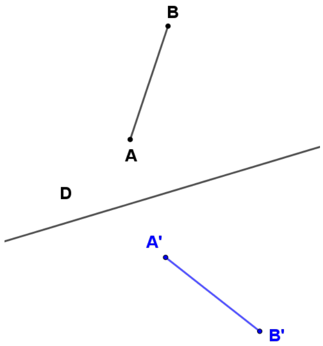
- Cas général
  $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ $\overrightarrow{A'C'}=\vec{u}$



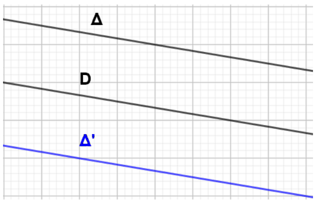
$(\vec{u};\overrightarrow{A'B'})=-(\vec{u};\overrightarrow{AB})$

4.3. Image d'un segment - Image d'une droite

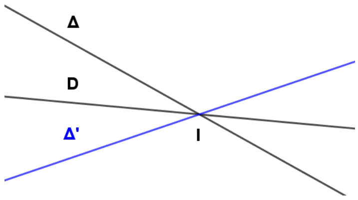
- L'image d'un segment par une symétrie orthogonale par rapport à une droite est un segment de même longueur donc une symétrie orthogonale par rapport à une droite est une **isométrie.**



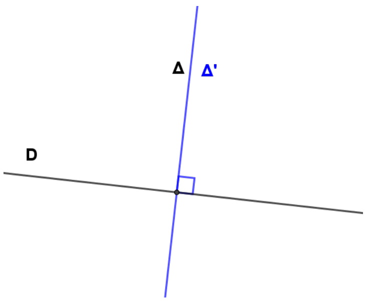
- L'image d'une droite Δ parallèle à D est une droite Δ' parallèle à D.



Cas particulier
Si $\Delta=D$ alors $\Delta'=\Delta=D$
- L'image d'une droite sécante à D en I est une droite passant par I.

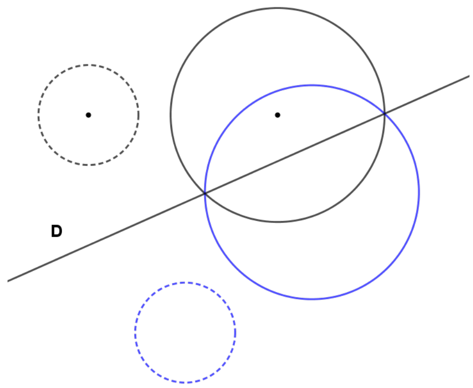


Cas particulier
Si Δ est une droite orthogonale à D alors $\Delta'=\Delta$



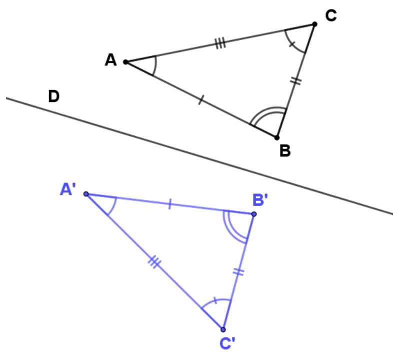
4.4. Image d'un cercle

L'image d'un cercle est un cercle de même rayon.



4.5. Image d'un triangle

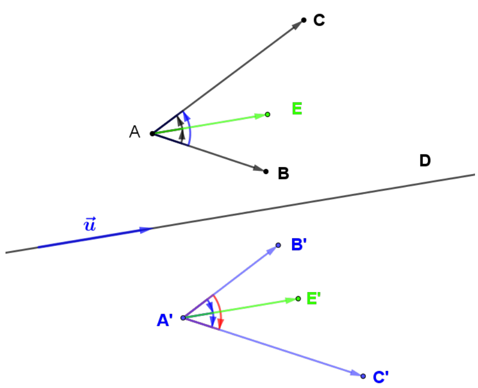
L'image d'un triangle est un triangle **isométrique** (les côtés sont égaux deux à deux).



Remarque :
$\widehat{B'A'C'} = \widehat{ABC}$
Les symétries orthogonales par rapport aux droites conservent les angles non orientés.
En particulier les symétries orthogonales par rapport aux droites conservent **l'orthogonalité.**

4.6. Image d'un angle orienté

Les symétries orthogonales par rapport à une droite un angle orienté en son opposé.

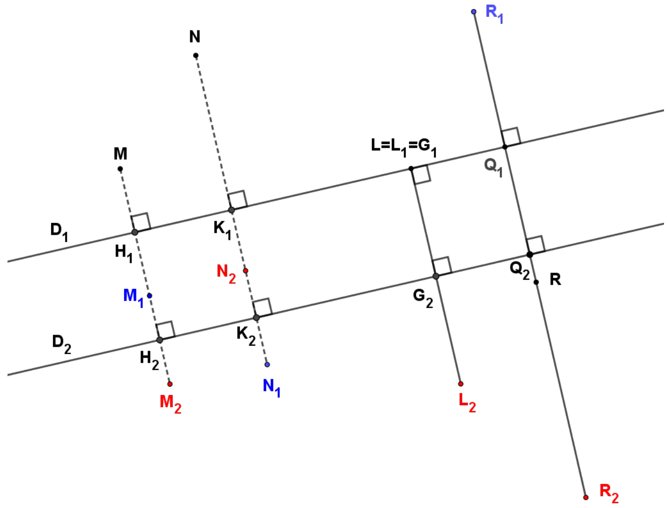


$\vec{u}$ est vecteur directeur de D.
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=(\overrightarrow{AB};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{AC})=-(\vec{u};\overrightarrow{AB})+(\vec{u};\overrightarrow{AC})$
$(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})=-(\vec{u};\overrightarrow{A'B'})+(\vec{u};\overrightarrow{A'C'})$
$(\vec{u};\overrightarrow{A'B'})=-(\vec{u};\overrightarrow{AB})$
$(\vec{u};\overrightarrow{A'C'})=-(\vec{u};\overrightarrow{AC})$
$(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})=+(\vec{u};\overrightarrow{AB})-(\vec{u};\overrightarrow{AC})=(\vec{u};\overrightarrow{AB})+(\overrightarrow{AC};\vec{u})=(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})=-(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

4.7. Composée de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites

D_1 et D_2 sont deux droites du plan.
S_{D_1} et S_{D_2} sont des symétries orthogonales respectivement par rapport à D_1 et à D_2.
On considère l'application $S_{D_2} o S_{D_1}$
$S_{D_1}(M)=M_1$ et $S_{D_1}(M_1)=M_2$

. 1^{er} cas : D_1 et D_2 sont parallèles.

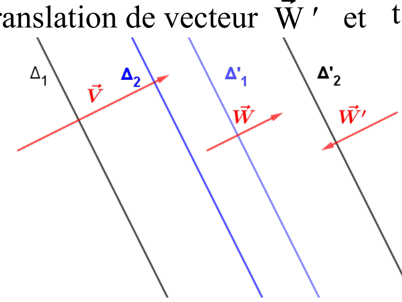


$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{MH_1}+\overrightarrow{H_1M_1}+\overrightarrow{M_1H_2}+\overrightarrow{H_2M_2}$
Or $\overrightarrow{MH_1}=\overrightarrow{H_1M_1}$ et $\overrightarrow{M_1H_2}=\overrightarrow{H_2M_2}$
$\overrightarrow{MM_2}=2\overrightarrow{H_1M_1}+2\overrightarrow{M_1M_2}=2.(\overrightarrow{H_1M_1}+\overrightarrow{M_1H_2})=2.\overrightarrow{H_1H_2}$
$\overrightarrow{H_1H_2}=\overrightarrow{K_1K_2}=\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{Q_1Q_2}=\vec{W}$
$\vec{W}$ est le vecteur, normal à D_1 et D_2, de la translation qui transforme D_1 et D_2.
$S_{D_2} o S_{D_1}$ est la translation de vecteur $\vec{V}=2.\vec{W}$
<u>Cas particulier</u>
Si $D_1=D_2=D$ alors $S_{D_2} o S_{D_1}=S_D o S_D=Id$
Id est l'application identique on peut dire que Id est la translation de vecteur nul.

. Réciproquement
Toute translation de vecteur non nul $\vec{V}$ peut s'écrire comme composéede deux symétries orthogonales par rapport aux droites Δ_1 et Δ_2 (de vecteur normal $\vec{V}$).
L'une peut -être choisie arbitrairement (mais de vecteur normal $\vec{V}$) l'autre est alors déterminée de manière unique.
$t_{\vec{V}}=S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$.

Le vecteur $\vec{V}$ est donné $\vec{W}=\frac{1}{2}\vec{V}$ $\vec{W}'=-\frac{1}{2}\vec{V}$.

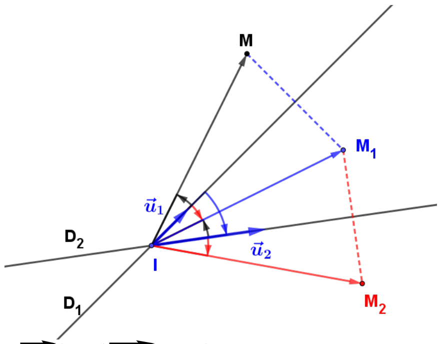
On choisit une droite Δ_1 de vecteur normal $\vec{V}$.
Δ_2 est l'image de Δ_1 par la translation de vecteur $\vec{W}$ et $t_{\vec{V}}=S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$.
On choisit une droite Δ'_2 de vecteur normal $\vec{V}$.
Δ'_1 est l'image de Δ'_2 par la translation de vecteur $\vec{W}'$ et $t_{\vec{V}}=S_{\delta'_2} o S_{\Delta'_1}$



Remarque

Si $\vec{V}=\vec{O}$ alors pour toute droite D du plan $t_O = S_D \circ S_D$

. $2^{\text{éme}}$ cas D_1 et D_2 sont sécantes en I.



$IM_1 = IM$ $\quad (\vec{u}_1;\overrightarrow{IM_1}) = -(\vec{u}_1;\overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{IM_1};\vec{u}_1)$

$IM_2 = IM_1$ $\quad (\vec{u}_2;\overrightarrow{IM_2}) = -(\vec{u}_2;\overrightarrow{IM_1})$

$(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM_2}) = (\vec{u}_1;\vec{u}_2)+(\vec{u}_1;\vec{u}_2)+(\vec{u}_2;\overrightarrow{IM_2}) = (\vec{u}_1;\overrightarrow{IM_1})+(\vec{u}_1;\vec{u}_2)-(\vec{u}_2;\overrightarrow{IM_1}) = (\vec{u}_1;\overrightarrow{IM_1})+(\overrightarrow{IM_1};\vec{u}_2)+(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$

$(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM_2}) = (\vec{u}_1;\vec{u}_2)+(\vec{u}_1;\vec{u}_2) = 2(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$.

$S_{D_2} \circ S_{D_1}$ est la rotation de centre I et d'angle de mesure $2(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$.

(On admet que l'angle de mesure $2(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ ne dépend pas du choix des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.)

Cas particulier

Si D_1 et D_2 sont perpendiculaires alors $S_{D_2} \circ S_{D_1}$ est la rotation de centre I et d'angle plat soit la symétrie centrale de centre I.

. Réciproquement

Toute rotation de centre I et d'angle non nul de mesure θ peut s'écrire comme composée de deux Symétries orthogonales par rapport aux droites Δ_1 et Δ_2 (sécantes en I).

L'une des deux droites peut-être choisie arbitrairement (mais passant par I) l'autre est alors déterm-imée de manière unique. $R = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

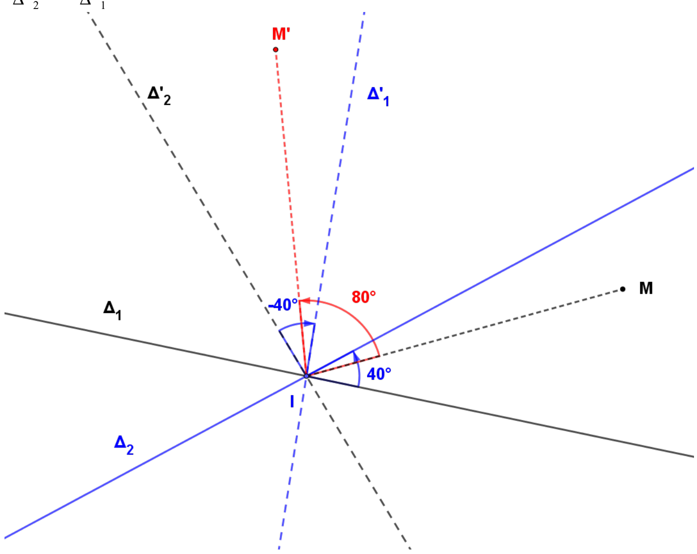
Le point I est fixé et θ est donné.

R est la rotation de centre I et d'angle de mesure θ .

$\beta = \frac{1}{2}\theta$ et $\beta' = -\frac{1}{2}\theta$

On choisit une droite Δ_1 passant par I, Δ_2 est l'image de Δ_1 par la rotation de centre I et d'angle de mesure β . $R = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$

On choisit une droite Δ'_2 passant par I, Δ'_1 est l'image de Δ'_2 lar la rotation de centre I et d'angle de mesure β' . $R = S_{\Delta'_2} \circ S_{\Delta'_1}$



Pour la figure précédente, on considère la rotation de centre I et d'angle de mesure 80° qui au point

M associe le point M'.
On choisit Δ_1 puis on obtient Δ_2.
On choisit Δ'_2 puis on obtient Δ'_1.

5. Compléments

5.1. Propriétés des rotations

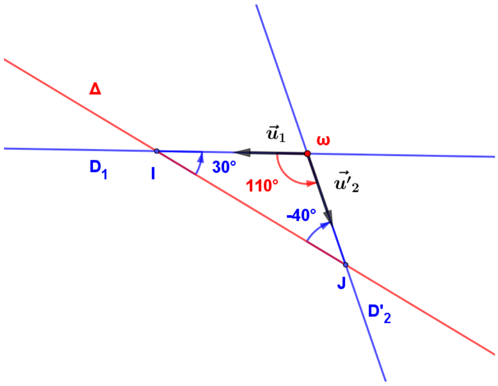
R est la rotation de centre I et d'angle de mesure θ
On peut considérer deux droites D_1 et D_2 passant par I telles que $R=S_{D_2} o S_{D_1}$.
$\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de D_1.
$\vec{u}_2$ est un vecteur directeur de D_2.

- Image d'un bipoint
  A et B sont deux points du plan.
  $R(A)=S_{D_2} o S_{D_1}(A)=S_{D_2}(A_1)=A_2$
  $R(B)=S_{D_2} o S_{D_1}(B)=S_{D_2}(B_1)=B_2$
  L'image du bipoint $\overrightarrow{AB}$ est le bipoint $\overrightarrow{A_2B_2}$.
  $A_2B_2=A_1B_1=AB$
  $(\vec{u}_1;\overrightarrow{A_1B_1})=-(\vec{u}_1;\overrightarrow{AB})$ et $(\vec{u}_2;\overrightarrow{A_2B_2})=-(\vec{u}_2;\overrightarrow{A_1B_1})$
  $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_2B_2})=(\overrightarrow{AB};\vec{u}_1)+(\vec{u}_1;\vec{u}_2)+(\vec{u}_2;\overrightarrow{A_2B_2})=-(\vec{u}_1;\overrightarrow{AB})+(\vec{u}_1;\vec{u}_2)+(\vec{u}_2;\overrightarrow{A_2B_2})$
  $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_2B_2})=(\vec{u}_1;\overrightarrow{A_1B_1})+(\vec{u}_1;\vec{u}_2)-(\vec{u}_2;\overrightarrow{A_1B_1})=(\vec{u}_1;\overrightarrow{A_1B_1})+(\vec{u}_1;\vec{u}_2)+(\overrightarrow{A_iB_1};\vec{u}_2)=(\vec{u}_1;\vec{u}_2)+(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$
  $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_2B_2})=2(\vec{u}_1;\vec{u}_2)=\theta$
  L'image du bipoint $\overrightarrow{AB}$ par une rotation d'angle de mesure θ est un bipoint $\overrightarrow{A_2B_2}$ tel que :
  $A_2B_2=AB$ et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_2B_2})=\theta$
- Image d'une droite
  L'image d'une droite (AB) par une rotation d'angle θ est une droite (A_2B_2) telle que :
  $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A_2B_2})=\theta$
  <u>Cas particulier</u>
  Si R est une rotation d'angle plat (symétrie centrale) l'image d'une droite est une droite parallèle.
- Image d'un angle orienté
  $A\neq B$ et $A\neq C$ $R(C)=S_{D_2} o S_{D_1}(C)=S_{D_2}(C_1)=C_2$
  $(\overrightarrow{A_1B_1};\overrightarrow{A_1C_1})=-(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ $(\overrightarrow{A_2B_2};\overrightarrow{A_2C_2})=-(\overrightarrow{A_1B_1};\overrightarrow{A_1C_1})$ donc $(\overrightarrow{A_2B_2};\overrightarrow{A_2C_2})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$
  Donc **une rotation conserve les angles orientés.**

5.2. Composée de deux rotations de centres distincts

- Exemple 1
  R est la rotation de centre I et d'angle $\theta=-60°$
  R' est la rotation de centre J et d'angle $\theta'=-80°$
  On suppose $I\neq J$ et on veut déterminer $R' o R$.
  On peut écrire :
  $R=S_{D_2} o S_{D_1}$ avec D_1 et D_2 sécantes en I et $R'=S_{D'_2} o S_{D'_1}$ avec D'_1 et D'_{2} sécantes en J.
  $R' o R=S_{D'_2} o S_{D'_1} o S_{D_2} o S_{D_1}$
  Peut-on choisir $D'_1=D_2$?
  D'_1 passe par J et D_2 passe par I. On choisit la droite $\Delta=(IJ)$ puis on détermine D_1 telle que $R=S_{D_1} o S_{\Delta}$ et D'_2 telle que $R'=S_{D'_2} o S_{\Delta}$.
  D_1 est l'image de Δ par la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{1}{2}(-60°)=30°$
  D'_2 est l'image de Δ par la rotation de centre J et d'angle de mesure $-\frac{1}{2}80°=-40°$

$R' o R = S_{D'_2} o S_\Delta o S_\Delta o S_{D_1} = S_{D'_2} o S_{D_1}$ car S_Δ est une application involutive et $S_\Delta o S_\Delta = Id$.



Les droites D'_2 et D_1 sont sécantes en ω .

Conclusion

$R' o R$ est la rotation de centre ω et d'angle de mesure $2(\vec{u}_1 ; \vec{u'}_2)$

On considère le triangle $IJ\omega$ et on obtient $\widehat{I\omega J} = 110°$ et $(\vec{u}_1 ; \vec{u'}_2) = 110°$ (orientation obtenue par le dessin).

On choisit pour mesure de l'angle de la rotation : $2 \times 110° - 360° = -140°$

On remarque : -140°=-80°-60°.

L'angle de la rotation composée $R' o R$ est égal à la somme des angles des rotations R et R'.

. Exemple 2

R est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\theta = 100°$

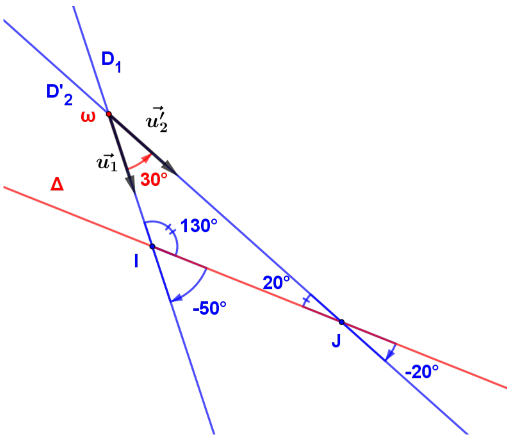
R' est la rotation de centre J et d'angle de mesure $\theta' = -40°$

$I \neq J$ et $\Delta = (IJ)$ $R = S_\Delta o S_{D_1}$ $R' = S_{D'_2} o S_\Delta$

D_1 est l'image de Δ par la rotation de centre I et d'angle $-\frac{1}{2} \times 100° = -50°$.

D'_2 est l'image de Δ par la rotation de centre J et d'angle $\frac{1}{2} \times (-40°) = -20°$

$R' o R = S_{D'_2} o S_\delta o S_\Delta o S_{D_1} = S_{D'_2} o S_{D_1}$



D_1 et D'_2 sont sécantes en ω .

Conclusion

$R' o R$ est la rotation de centre ω et d'angle de mesure $2(\vec{u}_1 ; \vec{u'}_2)$.

On considère leb triangle $IJ\omega$ et on obtient $\widehat{I\omega J} = 30°$ et $(\vec{u}_1 ; \vec{u'}_2) = 30°$ (orientation obtenue par le dessin).

La mesure de l'angle de la rotation est : $2 \times 30° = 60°$.

On remarque : $100° - 40° = 60°$

L'angle de la rotation composée $R' o R$ est égal à la somme des angles des rotations R et R'.

. Exemple 3

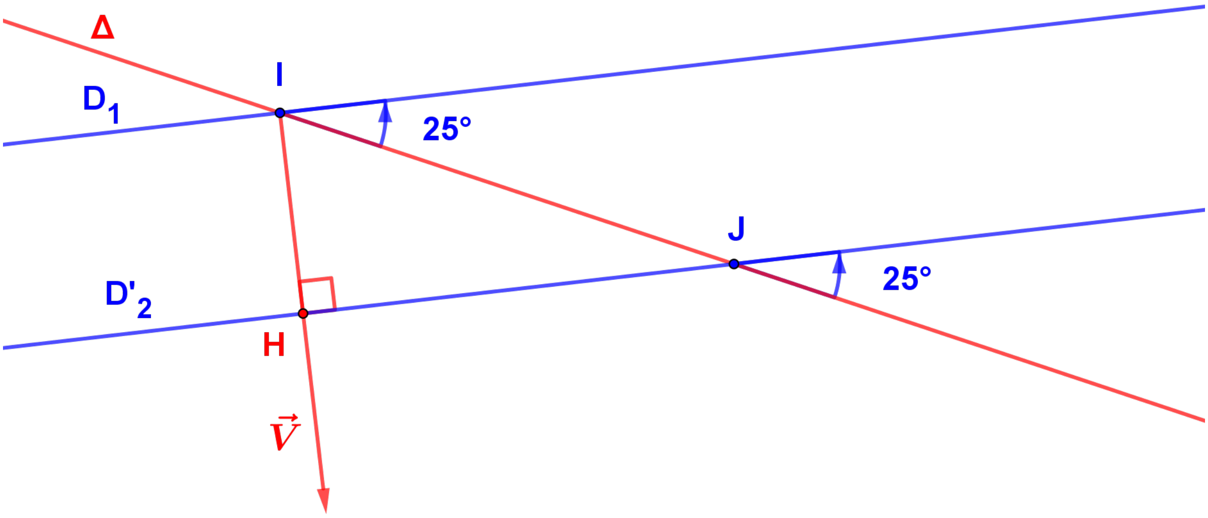
R est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\theta = -50°$

R' est la rotation de centre J et d'angle $\theta' = 50°$

$I \neq J \quad \Delta = (IJ) \quad R = S_\Delta o S_{D_1} \quad R' = S_{D'_2} o S_\Delta$

D_1 est l'image de Δ par la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{1}{2} \times (-50°) = 25°$.

D'_2 est l'image de Δ par la rotation de centre J et d'angle de mesure $\frac{1}{2} \times (50°) = 25°$.

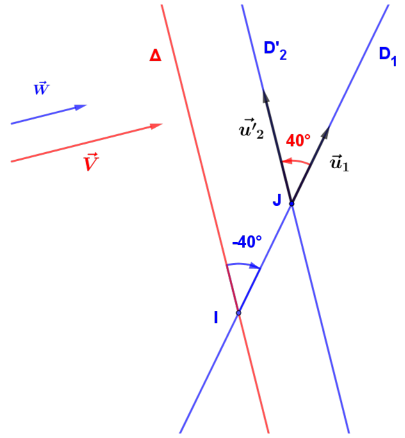


La sécante Δ aux deux droites D_1 et D'_2 détermine des angles correspondants égaux donc les droites D_1 et D'_2 sont parallèles.
Donc $R' o R = S_{D'_2} o S_{D_1}$ est la translation de vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{IH}$.

- **Conjectures**
  R est la rotation de centre I et d'angle de mesure θ
  R' est la rotation de centre J et d'angle de mesure θ'
  I et J ne sont pas nécessairement distincts.
  Si $\theta + \theta' \neq 0$ alors $R' o R$ est une rotation d'angle de mesure $\theta + \theta'$
  Si $\theta + \theta' = 0$ alors $R' o R$ est une translation (pour le cas particulier $I = J$ Id est la translation d'angle nul).

5.3. Composée d'une rotation et d'une translation

- Exemple
  R est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\theta = 80°$
  t est la translation de vecteur $\vec{V}$ (non nul).
  On veut déterminer $t o R$.
  $R = S_{D_2} o S_{D_1}$ D_1 et D_2 passent par I.
  $t = S_{D'_2} o S_{D'_1}$ D'_1 et D'_2 de vecteur normal $\vec{V}$.
  On choisit $\Delta = D'_1 = D_2$ la droite passant par I de vecteur normal $\vec{V}$.
  D_1 est l'image de Δ par la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{1}{2} \times 80° = -40°$
  D'_2 est l'image de Δ par une translation de vecteur $\vec{W} = \frac{1}{2}\vec{V}$.
  D_1 et D'_2 sont sécantes en J.
  $t o R$ est la rotation de centre J et d'angle de mesure $2(\vec{u}_1 ; \vec{u'}_2) = 80°$



. **Conjecture**
La composée d'une rotation et d'une translation est une rotation de même angle.

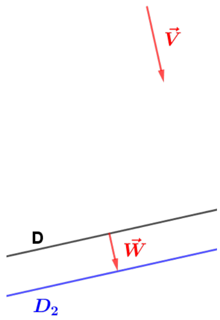
5.4. Composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et une translation

S_D est une symétrie orthogonale par rapport à la droite D.
t est la translation de vecteur $\vec{V}$.
On veut déterminer $t \circ S_D$

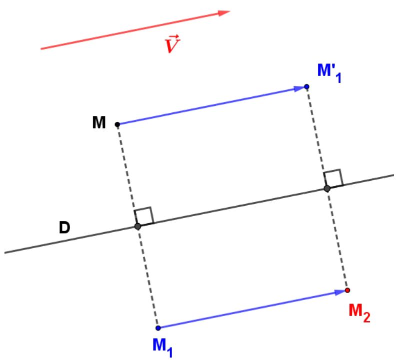
. Exemple 1
Le vecteur $\vec{V}$ est un vecteur normal à D.
$t = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ le vecteur $\vec{V}$ est un vecteur normal à D_1 et D_2.

On peut donc choisir $D_1 = D$. D_2 est l'image de D par la translation de vecteur $\vec{W} = \frac{1}{2}\vec{V}$.

$t \circ S_D = S_{D_2} \circ S_D \circ S_D = S_{D_2}$
$t \circ S_D$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D_2.



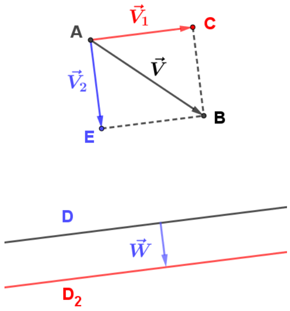
. Exemple 2
Le vecteur $\vec{V}$ est un vecteur directeur de D.
$t \circ S_D(M) = t(M_1) = M_2$



Remarque
$S_D \circ t(M) = S_D(M_1) = M_2$
Donc : $t \circ S_D = S_D \circ t$.

- Exemple 3

$\vec{V}$ n'est pas un vecteur directeur de D ni un vecteur normal à D.
On va écrire le vecteur $\vec{V}$ comme la somme de deux vecteurs l'un est colinéaire à un vecteur directeur de D l'autre est un vecteur colinéaire à un vecteur normal à D.
On pose $\vec{V}=\overrightarrow{AB}$, on trace les parallèles à D passant par A et B puis les perpendiculaires à D passant par A et B. On obtient un rectangle ACBE.
$\overrightarrow{AC}=\vec{V}_1$ (vecteur directeur de D) $\overrightarrow{AE}=\vec{V}_2$ (vecteur normal à D).



$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$
t_1 est la translation de vecteur $\vec{V}_1$
t_2 est la translation de vecteur $\vec{V}_2$
On a vu que $t_1 \circ t_2 = t$.
$t \circ S_D = t_1 \circ (t_2 \circ S_D)$
Or $t_2 = S_{D_2} \circ S_D$
D_2 est l'image de D par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{V}_2$
$t_2 \circ S_D = S_{D_2} \circ S_D \circ S_D = S_{D_2}$
$t \circ S_D = t_1 \circ S_{D_2}$ et le vecteur $\vec{V}_1$ est un vecteur directeur de D_2.

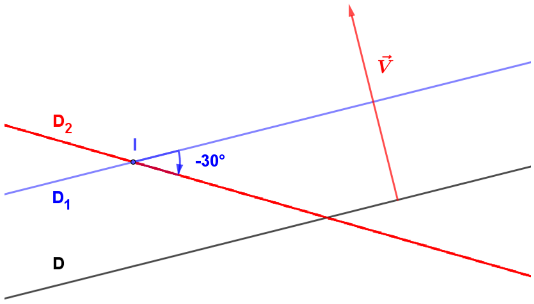
- **Conjecture**
Toute composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation de vecteur non normal à l'axe de la symétrie, peut s'écrire comme composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation telle que le vecteur de la translation soit un vecteur directeur de l'axe de la symétrie.

5.5. La composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une rotation

- Exemple

S_D est la symétrie orthogonale par rapport à la droite D.
R est la rotation de centre I et d'angle de mesure $\theta=-60°$
On veut déterminer $R \circ S_D$

$R = S_{D_2} \circ S_{D_1}$ D_1 et D_2 passent par I.
On choisit D_1 la droite passant par I et parallèle à D.
D_2 est l'image de D_1 par la rotation de centre I et d'angle de mesure $-\frac{1}{2}(-60°)=-30°$.
$R \circ S_D = S_{D_2} \circ (S_{D_1} \circ S_D)$
$S_{D_1} \circ S_D = t$ translation de vecteur $\vec{V}$.
$R \circ S_D = S_{D_2} \circ t$
$R \circ S_D$ est la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite.



- **Conjecture**
  La composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et une rotation est aussi la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

6. vocabulaire

- **On admet** que les isométries planes snt les symétrie orthogonales par rapport à une droite ou les composées de deux ou trois symétries orthogonales par rapport à des droites.
- Les composées de deux symétries orthogonales par rapport à des droites sont les rotations ou les translations. Ces applications conservent les angles orientés et se nomment **déplacements.**
  Nous avons vu que la composée de deux déplacements est un déplacement.
- Les symétries orthogonales par rapport à une droite ou les composées de trois symétries orthogonales par rapport à des droites transforment un angle orienté en son opposé et se nomment **antidéplacements.**
  Les composées de trois symétries peuvent s'écrire comme la composée d'une translation et d'une symétrie.
  Si le vecteur de la translation est normal à l'axe de symétrie alors on obtient une symétrie orthogonale par rapport à une droite .
  Si le vecteur de translation n'est pas normal à l'axe de symétrie, on peut écrire cette application comme composée d'une symétrie et d'une translation dont le vecteur est un vecteur directeur de l'axe de symétrie.
  Cette application se nomme **antidéplacement sans point invariant.**
  Remarque
  La composée de deux antidéplacements est un déplacement.