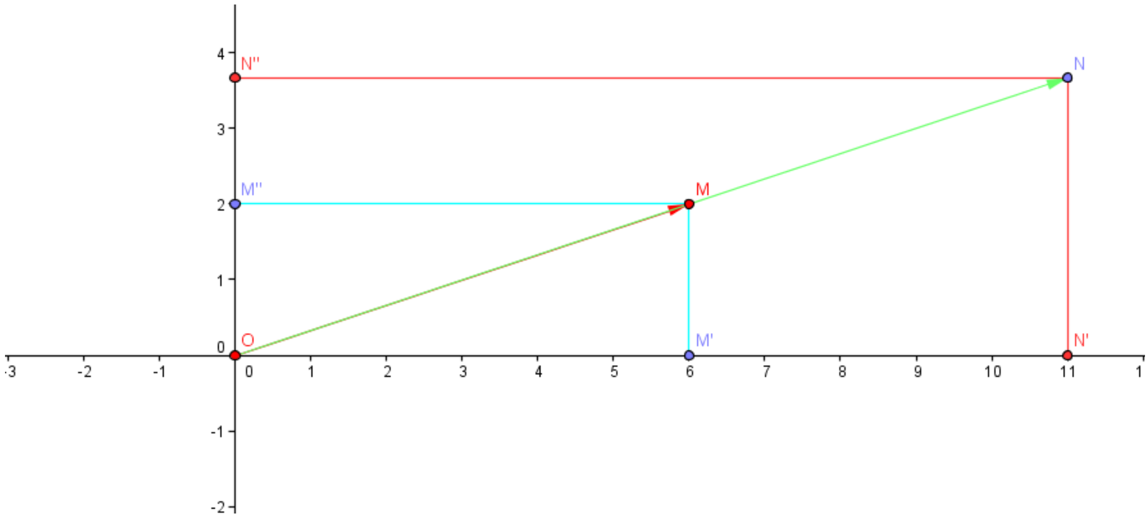
Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1. Remarque

$\Re = (O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.

1.1.Cas d'un réel strictement positif

On considère $\vec{u}(x ; y)$ tel que x>0 et y>0 et λ >0.



$\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ $M'(x ; 0)$ remarque x>0 donc x = OM'.

N' est le point de coordonnées $(\lambda x ; 0)$ $\lambda x > 0$ donc $\lambda x = ON'$

Soit N le point de (OM) d'abscisse : λx

Les triangles OMM' et ONN' constituent une configuration de Thalés.

Donc $\dfrac{ON}{OM} = \dfrac{ON'}{OM'} = \dfrac{\lambda x}{x} = \lambda$

et $ON'' = \lambda OM''$ OM'' = y Donc l'ordonnée de N'' est λy

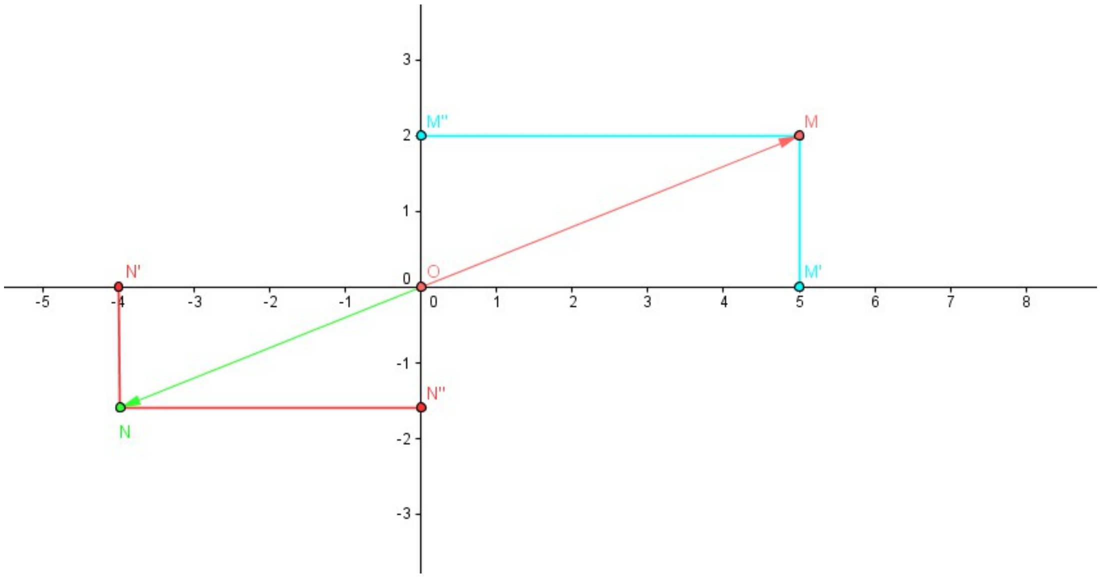
conséquence le point N a pour coordonnées $(\lambda x ; \lambda y)$

et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}(\lambda x ; \lambda y)$

On notera $\overrightarrow{ON} = \lambda \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \lambda \vec{u}$

1.2.Cas d'un réel strictement négatif

On considère $\vec{u}(x ; y)$ tel que x>0 et y>0 et λ <0.



$\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ $M'(x\,;0)$ remarque x>0 donc x = OM'.

N' est le point de coordonnées $(+\lambda x\,;0)$ $\lambda x=-ON'$ car $\lambda x<0$

Par le même raisonnement

$$\frac{ON}{OM}=\frac{ON'}{OM'}=\frac{-\lambda x}{x}=-\lambda$$

et $ON''=-\lambda\, OM''$

L'ordonnée de M'' est y celle de N'' : $-ON''=\lambda y$

$N''(0\,;\lambda y)$ et $N(\lambda x\,;\lambda y)$ et $\vec{v}=\overrightarrow{ON}(\lambda x\,;\lambda y)$

On notera et $\vec{v}=\lambda\vec{u}$

2.Définition

$\Re=(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

λ ***est un nombre réel et*** $\vec{u}$ ***est un vecteur de coordonnées*** $(x\,;y)$

le produit du vecteur $\vec{u}$ ***par le réel*** λ ***est le vecteur :***

$\vec{v}=\lambda\vec{u}(\lambda x\,;\lambda y)$

3. Interprétation géométrique

$\vec{u}$ est un vecteur du plan donné.

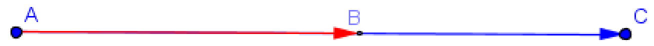
λ est un nombre réel donné

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=\lambda\vec{u}$

✔ Si $\vec{u}=\vec{0}$ donc A = B alors $\lambda\vec{u}=\vec{0}$ et A = C

Si $\lambda=0$ alors $\lambda\vec{u}=\vec{0}$ et A = C

✔ Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\lambda>0$



$AC = \lambda AB \quad C \in [AB]$

$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **ont le même sens.**

Remarque :

- Si $0 < \lambda < 1$ alors $C \in [AB]$
- Si $\lambda = 1$ alors C = B
- Si $\lambda > 1$ alors les points A;B;C sont alignés dans cet ordre

✔ Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\lambda < 0$

$AC = -\lambda AB \quad C \in (AB)$ et $C \notin [AB)$

$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **sont de sens contraire.**

Remarque :

Les points B;A;C sont alignés dans cet ordre. Si $\lambda = -1$ alors AB = AC et A est le milieu de [BC]

On a $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$

Or $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$

On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Or $\overrightarrow{AC} = (-1)\overrightarrow{AB}$ et $(-1)\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$

4. Propriétés

On peut vérifier les résultats suivants :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ et pour tous nombres réels λ et λ' on a :

✔ $\lambda(\vec{u} + \vec{u'}) = \lambda \vec{u} + \lambda \vec{u'}$

✔ $(\lambda + \lambda')\vec{u} = \lambda \vec{u} + \lambda' \vec{u}$

✔ $(\lambda \times \lambda')\vec{u} = \lambda(\lambda' \vec{u})$

✔ Différence de deux vecteurs : $\vec{u} - \vec{u'} = \vec{u} + (-1)\vec{u'}$

5. Coordonnées d'un vecteur

$\Re = (O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. $\vec{u}(x ; y)$ $\quad \vec{u} = \overrightarrow{OM}(x ; y)$

Donc $M(x ; y) \quad M'(x ; 0) \quad M''(0 ; y)$

- ✔ Si $x>0$ alors $OM'=x$

  $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ OI = 1

  Soit $\vec{v}=x\vec{i}=x\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OP}$ donc $x\times OI=OP$ et $OP=x$

  $OP=OM'$ et $P(x\,;0)$ donc $P=M'$

  et $\overrightarrow{OM'}=x\vec{i}$

- ✔ Si $x<0$ alors $OM'=-x$

  $\vec{v}=x\vec{i}=x\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OP}$ donc $OP=-xOI=-x$

  $OP=OM'$ et $P(x\,;0)$ donc $P=M'$ et $\overrightarrow{OM'}=x\vec{i}$

- ✔ Si $x=0$ alors M' = P = 0 et $\overrightarrow{OM'}=0\vec{i}$

- ✔ Si $y>0$ alors $OM''=y$

  $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ OJ = 1

  Soit $\vec{w}=y\vec{j}=y\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OL}$ donc $y\times OJ=OL$ et $OL=y$

  $L(0;y)$ et $M''=L$ et $\overrightarrow{OM''}=y\vec{j}$

- ✔ Si $y<0$ alors $OM''=-y$

  $\vec{w}=y\vec{j}=y\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OL}$

  donc $-y\times OJ=OL$ et $OL=-y$

  $L(0;y)$ et $M''=L$ et $\overrightarrow{OM''}=y\vec{j}$

- ✔ Si $y=0$ alors $M''=L=0$ et $\overrightarrow{OM''}=0\vec{j}$

Conclusion :

$\Re=(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ ***est un repère du plan.***

Si $\vec{u}(x\,;y)$ ***alors*** $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$

.

