Ordre dans l'ensemble des nombres réels

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

1. Comparer des nombres réels

1.1. Rappels

$a>0$ se lit: « a est strictement supérieur à 0 » ou « a est strictement positif »

$b<0$ se lit: « a est strictement inférieur à 0 » ou « b est strictement négatif »

1.2. Définitions

a et b deux réels (on note $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$)

$a>b$ (ou $a<b$) signifie que $a-b>0$ (ou $a-b<0$)

1.3. Remarque

Comparer deux nombres, c'est déterminer s'ils sont égaux ou sinon c'est déterminer le plus grand des deux nombres.

Exemple: comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$

$\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{-2}{15}$ <0

donc $\frac{2}{3}<\frac{4}{5}$

1.4. Propriété

a, b, c sont des nombres réels (on note $a\in\mathbb{R}$; $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$)

Si $a\leq b$ et si $b\leq c$ alors $a\leq c$

<u>Démonstration:</u>

$a\leq b$ alors $0\leq b-a$

$b\leq c$ alors $0\leq c-b$

La somme de deux nombres positifs est positive

$0\leq b-a+c-b$

$0\leq c-a$

donc $a\leq c$

<u>Conséquence:</u>

comparer: -4 et 5

$-4<0$ et $0<5$ donc $-4<5$

comparer: $\frac{4}{7}$ et $\frac{5}{3}$

$\frac{4}{7}$ <1 et $\frac{5}{3}$ >1 donc $\frac{4}{7}$ $<$ $\frac{5}{3}$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

2. Ordre et opérations

2.1. Propriétés

On peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité <u>sans changer</u> le sens de cette inégalité.

$a\in\mathbb{R}$ $b\in\mathbb{R}$ $c\in\mathbb{R}$

$si\ a\leq b\ alors\ a+c\leq b+c$

On peut multiplier par un même nombre <u>strictement positif</u> les deux membres d'une inégalité <u>sans changer</u> le sens de l'égalité.

$a\in\mathbb{R}$ $b\in\mathbb{R}$ $k\in\mathbb{R}$ $k>0$

$si\ a\leq b\ alors\ ka\leq kb$

Si k=0 alors ka=kb=0, on peut donc aussi écrire $ka\leq kb$

On peut multiplier par un même nombre <u>strictement négatif</u> les deux membres d'une inégalité mais il faut <u>changer</u> le sens de l'inégalité.

$a\in\mathbb{R}$ $b\in\mathbb{R}$ $k\in\mathbb{R}$ $k<0$

$si\ a\leq b\ alors\ ka\geq kb$

Si k=0 alors ka=kb=0, on peut donc aussi écrire $ka\geq kb$

<u>Cas particulier:</u> si $a\leq b$ alors $-a\geq -b$

2.2. Exercice

$a\in\mathbb{R}$, démontrer

si $0<a<1$ alors $0<a^3<a^2<a<1$

si $1<a$ alors $1<a<a^2<a^3$

si $0<a<1$ (et $a>0$) $0\times a<a\times a<1\times a$

soit $0<a^2<a$ (et $a>0$) $0\times a<a^2\times a<a\times a$

soit $0<a^3<a^2$

Conclusion: $0<a^3<a^2<a<1$

si $1<a$ (et $a>0$) $1\times a<a\times a$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

soit $a<a^2$ (et $a>0$) $a\times a<a^2<a$

soit $1<a<a^2<a^3$

Exemple:

a= $\sqrt{2}-1$ $0<a<1$

a²= $(\sqrt{2}-1)^2=(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times 1+1^2$

a²= $3-2\sqrt{2}$

$a^3=a^2\times a$

$a^3=$ $(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$

$a^3=$ $3\sqrt{2}-3-4+2\sqrt{2}$

$a^3=$ $5\sqrt{2}-7$

et $0<5\sqrt{2}-7<3-2\sqrt{2}<\sqrt{2}-1$

3. Valeurs approchées des nombres réels. Notation scientifique

a) Nombres décimaux

148,75= $\frac{14875}{100}=14875\times 10^{-2}=148750\times 10^{-3}=1487500\times 10^{-4}=1487,5\times 10^{-1}$

= $148,75\times 10^0=14,875\times 10^1=1,4875\times 10^2=0,14875\times 10^3$

Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme $a\times 10^n$ où $1\leq a<10$ et n est un entier relatif. Cette écriture se nomme notation scientifique du nombre (notation souvent utilisée par les calculatrices)

Exemples:

Écrire en utilisant la notation scientifique les nombres suivants:

12604   0,012604   126,04

$12604=1,2604\times 10^4$

$0,012604=1,2604\times 10^{-2}$

$126,04=1,2604\times 10^2$

b) Nombres réels non décimaux

$\frac{4}{3}\approx 1,33\ldots$

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

$1{,}3 < \frac{4}{3} < 1{,}4$ $\quad$ $1{,}4-1{,}3=0{,}1=10^{-1}$

$1{,}33 < \frac{4}{3} < 1{,}34$ $\quad$ $1{,}34-1{,}33=0{,}01=10^{-2}$

$1{,}333 < \frac{4}{3} < 1{,}334$ $\quad$ $1{,}334-1{,}333=0{,}001=10^{-3}$

1,3 est une valeur approchée par défaut de $\frac{4}{3}$ à 10^{-1} près.

1,4 est une valeur approchée par excès de $\frac{4}{3}$ à 10^{-1} près.

1,33 est une valeur approchée par défaut de $\frac{4}{3}$ à 10^{-2} près.

1,34 est une valeur approchée par excès de $\frac{4}{3}$ à 10^{-2} près.

1,333 est une valeur approchée par défaut de $\frac{4}{3}$ à 10^{-3} près.

1,334 est une valeur approchée par défaut de $\frac{4}{3}$ à 10^{-3} près.

1,33 est l'arrondi au centième près.

Avec la calculatrice, déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.

$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$

1,4142 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par défaut à 10^{-4} près.

4. Encadrements

4.1. Encadrement d'une somme

$a \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \quad c \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R} \quad d \in \mathbb{R}$

si $a \leq x \leq b$ *et* *si* $c \leq y \leq d$

alors $a+c \leq x+y \leq b+d$

Exemple:

$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$ $\quad$ amplitude des encadrements: 10^{-3}

$4{,}881 < \sqrt{7} + \sqrt{5} < 4{,}883$ $\quad$ amplitude de l'encadrement: 2×10^{-3}

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

4.2. Encadrement d'une différence

Il ne faut pas effectuer la différence des encadrements.

Pour obtenir un encadrement de x-y, on écrit un encadrement de x, puis un encadrement de -y et on fait la somme x+(-y)

Exemple:

$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$

$-2{,}236 > -\sqrt{5} > -2{,}237$

$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$

$-2{,}237 < -\sqrt{5} < -2{,}236$

Donc $0{,}408 < \sqrt{7} - \sqrt{5} < 0{,}410$ amplitude de l'encadrement: 2×10^{-3}

4.3. Encadrement d'un produit

$a\in\mathbb{R}$ $x\in\mathbb{R}$ $b\in\mathbb{R}$ $c\in\mathbb{R}$ $y\in\mathbb{R}$ $d\in\mathbb{R}$

si $0\le a\le x\le b$ *et si* $0\le c\le y\le d$

alors $ac\le xy\le bd$

Exemple:

$2{,}645 < \sqrt{7} < 2{,}646$

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

$5{,}91422 < \sqrt{7} \times \sqrt{5} < 5{,}919102$

Si on ne veut conserver que 3 chiffres après la virgule:

$5{,}914 < \sqrt{7} \times \sqrt{5} < 5{,}920$ amplitude de l'encadrement: 6×10^{-3}

d) Encadrement de l'inverse d'un réel strictement positif

$a\in\mathbb{R}$ $x\in\mathbb{R}$ $b\in\mathbb{R}$

si $0<a\le x\le b$ *alors* $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{x}<\frac{1}{a}$

Exemple:

$2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$

$$\frac{1}{2{,}237}<\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2{,}236}$$

$$0{,}4470272<\frac{1}{\sqrt{5}}<0{,}4472271$$

On ne veut conserver que 4 chiffres après la virgule:

$0{,}4470<\frac{1}{\sqrt{5}}<0{,}4473$ amplitude de l'encadrement: 3×10^{-4}

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés

4.4. Encadrement d'un quotient

on détermine un encadrement du produit du numérateur et de l'inverse du dénominateur

Exemple:

$2,645 < \sqrt{7} < 2,646$

$\frac{1}{2,237} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2,236}$

$1,182315 < \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} < 1,183558$

On ne veut conserver que 4 chiffres après la virgule:

$1,182 < \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} < 1,184$ amplitude de l'encadrement: 2×10^{-3}

Copyright ® meilleurenmaths.com. Tous droits réservés