Ordre dans l'ensemble des nombres réels

Fiche exercices

EXERCICE 1

Démontrer les affirmations suivantes:
1. si $x>2$ alors $2x-4>0$
2. si $x>-1$ alors $-3x+4<7$
3. Pour tout nombre réel x: $(2x-3)^2+2\geq 2$
4. Pour tout nombre réel x: $-2(x-4)^2+3\leq 3$

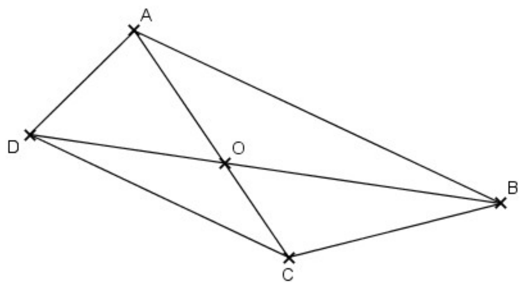
EXERCICE 2

1. a et b sont deux nombres réels. Démontrer que:
$2ab\leq a^2+b^2$ (1)
En déduire que $(a+b)^2\leq 2(a^2+b^2)$ (2)

2. a; b et c sont des nombres réels.
Écrire deux autres inégalités analogues à l'inégalité (1).
En déduire que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

EXERCICE 3

ABCD est un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en O.



1. Démontrer que
$AB+BC+CD+DA\geq 2AC$
$AB+BC+CD+DA\geq 2BD$
$AB+BC+CD+DA\geq AC+BD$

2. En utilisant le point O, montrer que:
$AB+BC+CD+DA\leq 2(AC+BD)$

3. En déduire les encadrements du périmètre du quadrilatère et de la somme des longueurs des diagonales.

(Rappel: dans tout triangle, la longueur d'un côté est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés)

EXERCICE 4

$3,1415<\pi<3,1416$

$1,7320<\sqrt{3}<1,7321$

Déterminer les encadrements de:

$\sqrt{3}+\pi$ $\pi-\sqrt{3}$ $\pi\times\sqrt{3}$ $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

EXERCICE 5

$x\in\mathbb{R}$ $y\in\mathbb{R}$ $2\leq x\leq 8$ $1\leq y\leq 6$

Déterminer les encadrements de:

$x+y$ $x-y$ xy $\frac{x}{y}$ $2x-3y$ x^2 y^2 x^2-y^2

CORRECTION

EXERCICE 1

1.
$x>2$
$2x>2\times2$
$2x>4$
$2x-4>4-4$
$2x-4>0$

2.
$x>-1$
$-3x<(-1)\times(-3)$
$-3x<3$
$-3x+4<3+4$
$-3x+4<7$

3.
Un carré est toujours un nombre positif, donc pour tout nombre réel x: $(2x-3)^2\geq0$
$(2x-3)^2\geq0$
$(2x-3)^2+2\geq0+2$
$(2x-3)^2+2\geq2$

4.
Pour tout nombre réel x: $(x-4)^2\geq0$
$(x-4)^2\geq0$
$-2(x-4)^2\leq0\times(-2)$
$-2(x-4)^2\leq0$
$-2(x-4)^2+3\leq0+3$
$-2(x-4)^2+3\leq3$

EXERCICE 2

1.
Pour tous réels a et b
$(a-b)^2\geq0$
$a^2-2ab+b^2\geq0$
$a^2+b^2\geq2ab$

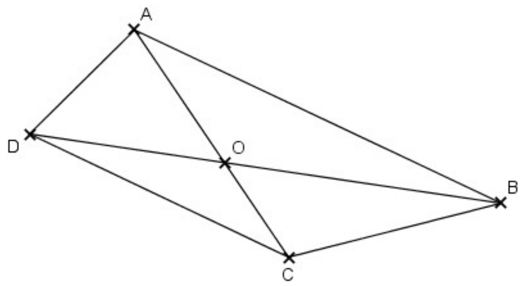
c'est à dire:
$2ab\leq a^2+b^2$ (1)

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Or $a^2+b^2\geq2ab$
$a^2+b^2+a^2+b^2\geq2ab+a^2+b^2$
$2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$
c'est à dire:
$(a+b)^2\leq2(a^2+b^2)$ (2)

2.
$a^2+b^2\geq 2ab$
$a^2+c^2\geq 2ac$
$b^2+c^2\geq 2bc$

$a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2\geq 2ab+2ac+2bc$
$2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+ac+bc)$
$a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

EXERCICE 3



1.
Dans le triangle ABC:
$AC\leq AB+BC$
Dans le triangle ADC:
$AC\leq AD+DC$
donc: $2AC\leq AB+BC+AD+DC$

Dans le triangle ABD:
$BD\leq AB+AD$
Dans le triangle BCD:
$BD\leq BC+CD$
donc: $2BD\leq AB+AD+BC+CD$

Des deux résultats précédents:
$2AC+2BD\leq AB+BC+AD+DC+AB+AD+BC+CD$
$2(AC+BD)\leq 2(AB+BC+AD+DC)$
$AC+BD\leq AB+BC+AD+DC$

2.
Dans le triangle OAB:
$AB\leq AO+OB$
Dans le triangle OBC:
$BC\leq BO+OC$
Dans le triangle OCD:
$CD\leq CO+OD$
Dans le triangle OAD:
$AD\leq AO+OD$
On obtient:
$AB+BC+CD+DA\leq AO+OB+BO+OC+CO+OD+AO+OD$
$AB+BC+CD+DA\leq 2(AO+OC)+2(BO+OD)$

A, O, C sont alignés dans cet ordre donc AO+OC=AC
B, O, D sont alignés dans cet ordre donc BO+OD=BD
Donc:
AB+BC+CD+DA≤2AC+2BD

3.
Périmètre du quadrilatère= AB+BC+CD+DA
AC+BD≤périmètre du quadrilatère≤2AC+2BD

Somme des longueurs des diagonales=AC+BD
$\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$ ≤Somme des longueurs des diagonales≤AB+BC+AD+DC

EXERCICE 4

3,1415<π<3,1416
1,7320< $\sqrt{3}$ <1,7321 amplitude des 2 encadrements: 10^{-4}

3,1415+1,7320< $\sqrt{3}+\pi$ <3,1416+1,7321
4,8735< $\sqrt{3}+\pi$ <4,8737 amplitude de l'encadrement: 2×10^{-4}

-1,7320>- $\sqrt{3}$ >-1,7321
3,1415<π<3,1416
-1,7321<- $\sqrt{3}$ >-1,7320
3,1415-1,7321<π− $\sqrt{3}$ <3,1416-1,7320

3,1415×1,7320< $\pi\times\sqrt{3}$ <3,1416×1,7321
5,441078< $\pi\times\sqrt{3}$ <5,44156336
Si on ne veut conserver que 4 chiffres après la virgule:
5,4410< $\pi\times\sqrt{3}$ <5,4416 amplitude de l'encadrement: 6×10^{-4}

$$\frac{1}{1{,}7321}<\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{1{,}7320}$$

$$0{,}577333872<\frac{1}{\sqrt{3}}<0{,}577367205$$

Si on ne veut conserver que 4 chiffres après la virgule:

$$0{,}5773<\frac{1}{\sqrt{3}}<0{,}5774$$

$$3{,}1415\times0{,}5773<\frac{\pi}{\sqrt{3}}<3{,}1416\times0{,}5774$$

$1,81358195 < \frac{\pi}{\sqrt{3}} < 1,81395384$

Si on ne veut conserver que 4 chiffres après la virgule:

$1,8135 < \frac{\pi}{\sqrt{3}} < 1,8140$

EXERCICE 5

$x \in \mathbb{R} \quad y \in \mathbb{R} \quad 2 \leq x \leq 8 \qquad 1 \leq y \leq 6$

Déterminer les encadrements de:

$2+1 \leq x+y \leq 8+6$

$3 \leq x+y \leq 14$

$-6 \leq -y \leq -1$

$2-6 \leq x-y \leq 8-1$

$-4 \leq x-y \leq 7$

$2 \times 1 \leq xy \leq 8 \times 6$

$2 \leq xy \leq 48$

$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{1}$

$2 \times \frac{1}{6} \leq \frac{x}{y} \leq 1 \times 8$

$\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq 8$

$4 \leq 2x \leq 16$

$-18 \leq -3y \leq -3$

$-14 \leq 2x-3y \leq 13$

$2^2 \leq x^2 \leq 8^2$

$4 \leq x^2 \leq 64$

$1^2 \leq y^2 \leq 6^2$

$1 \leq y^2 \leq 36$

$-36 \leq y^2 \leq -1$

$-32 \leq x^2-y^2 \leq 63$

