Probabilités

1. *Loi de probabilités sur un ensemble fini*

1.1. Jeu de pile ou face

On lance une pièce de monnaie, il y a 2 issues à cette expérience aléatoire:
p: pile f: face

Nous avons vu en réalisant « un grand nombre » de simulations que les fréquences de p et de f sont très voisines de $\frac{1}{2}=0{,}5$.

On modélise cette expérience en posant pour probabilité pour l'issue p: $\frac{1}{2}$ et pour probabilité pour l'issue f: $\frac{1}{2}$.

On note E={p;f} l'ensemble des issues que l'on appelle univers.

On donne le tableau

issues	p	f
Probabilités	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On remarque que: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Donner les probabilités de toutes les issues c'est définir la loi de probabilité sur E de l'expérience aléatoire.

Si la probabilité de toutes les issues sont égales alors on dit que la loi est équiprobable.

1.2. Dé

On lance un dé cubique bien équilibré et on note le chiffre obtenu.

Il y a 6 issues à cette expérience aléatoire: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Nous avons vu en réalisant « un grand nombre » de simulations que les fréquences des six issues sont très voisines de $\frac{1}{6}$

Univers E={1; 2; 3; 4; 5; 6}

Chaque élément de E est une issue que l'on nomme aussi éventualité ou événement élémentaire.

On donne la loi de probabilité de cette expérience sous forme d'un tableau:

issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La loi est équirépartie et:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

1.3. Cas général

Si on considère une expérience aléatoire ayant n issues: x_1; x_2; …; x_n avec $n\in\mathbb{N}^*$.

A chaque issue x_i on associe un nombre strictement positif p_i que l'on nomme probabilité de l'issue x_i.

On a: $p_1+p_2+...+p_n=1$

L'univers est $E=\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$

On donne la loi de probabilité sous forme d'un tableau:

issues	x_1	x_2		x_i		x_n
Probabilités	p_1	p_2		p_i		p_n

1.4. Loi équirépartie

Si la loi est équirépartie alors $p_1=p_2=...=p_n$ et $p_1+p_2+...+p_n=1$ donc la probabilité de chaque éventualité est égale à $\frac{1}{n}$

1.5. Remarque

En général, on ne démontre pas qu'une loi est équirépartie.
Pour certaines expériences aléatoires, il semble raisonnable de choisir cette hypothèse (par exemple: tirage du loto: il semble raisonnable de poser que chaque résultat à la même probabilité d'être obtenu)
C'est pour cela que lorsque l'on peut réaliser des simulations de l'expérience aléatoire, on peut accepter ou refuser cette hypothèse au seuil de 95%.

1.6. Exemple de modélisation d'une expérience aléatoire

On considère un dé cubique bien équilibré dont trois faces sont rouges; deux faces sont bleues et la dernière face est verte.

On lance ce dé et on note la couleur de la face supérieure.

On obtient comme univers: E={R;B;V}

Par quelle loi de probabilité faut-il modéliser cette expérience aléatoire?

Il n'est pas raisonnable de penser que la loi est équirépartie: la probabilité de R doit être supérieure à celle de V.

On se propose de modéliser cette expérience aléatoire et d'effectuer un 'grand nombre » de simulations.

Pour modéliser, il suffit de numéroter les six faces du dé et de supposer que les faces rouges sont les faces 1; 2; 3, les faces bleues 4 et 5 et la face verte 6.

On utilise un tableur.

En A1, on entre: « =alea.entre.bornes(1;6) », on appuie sur entrée.

On simule ainsi le lancé du dé, on obtient un chiffre de 1 à 6.

En B1, on écrit: « =si(A1<4; 1;0) », on appuie sur entrée.

Cela signifie, que si on obtient 1; 2 ou 3 alors la face est rouge et on obtient 1 en B1.

En C1, on écrit: « =si(A1=4; 1;0) », on appuie sur entrée.

En D1, on écrit: « =si(A1=5; 1;0) », on appuie sur entrée.

En E1, on écrit: « =C1+D1 », on appuie sur entrée.

Cela signifie, que si on obtient 4 ou 5 alors la face est bleue et on obtient 1 en E1.

En F1, on écrit: « =si(A1=6; 1;0) », on appuie sur entrée.

Cela signifie, que si on obtient 6 alors la face est verte et on obtient 1 en F1.

On étire ces formules jusque 1000.

En H2, on écrit: « =somme(B1:B1000) », on appuie sur entrée.

En H2, on obtient le nombre de fois où rouge est sorti.

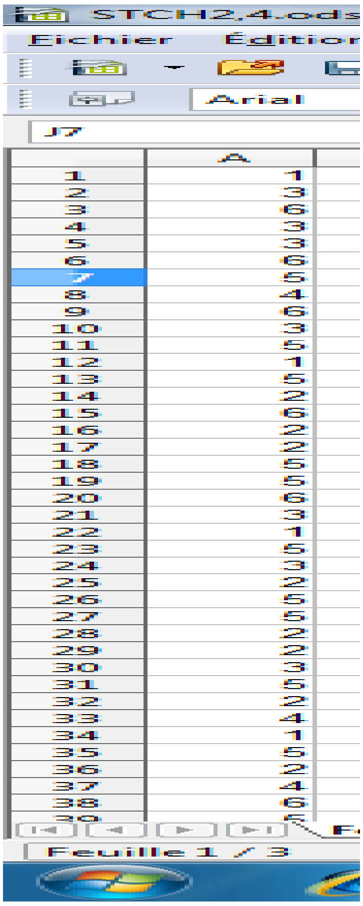
En H3, on écrit: « =somme(E1:E1000) », on appuie sur entrée.

En H3, on obtient le nombre de fois où bleu est sorti.

En H4, on écrit: « =somme(F1:F1000) », on appuie sur entrée.

En H4, on obtient le nombre de fois où vert est sorti.

Voici les premières lignes obtenues:



	A
1	1
2	3
3	6
4	3
5	3
6	6
7	5
8	4
9	6
10	3
11	5
12	1
13	5
14	2
15	6
16	2
17	2
18	5
19	5
20	6
21	3
22	1
23	5
24	3
25	2
26	5
27	5
28	2
29	2
30	3
31	5
32	2
33	4
34	1
35	5
36	2
37	4
38	6

La fréquence de rouge est: 0,511

La fréquence de bleu est: 0,320

La fréquence de vert est: 0,169

Il faut effectuer plusieurs séries de 1000 simulations avant d'émettre une conjecture.

Mais il n'y a qu'une face verte et le dé est bien équilibré, on peut envisager de poser pour probabilité à V: $\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6} \approx 1{,}66\ldots$ Ce résultat n'est pas « éloigné » de la simulation obtenue.

Pour rouge, le dé a trois faces rouges, on peut poser $3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ pour probabilité pour rouge. Ce résultat n'est pas « éloigné » de la simulation obtenue.

Pour bleu, le dé a deux faces bleues, on peut poser $2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ pour probabilité pour bleu. Ce résultat n'est pas « éloigné » de la simulation obtenue.

On vérifie: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

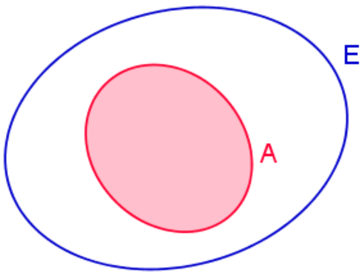
On donne la loi de probabilité sous forme de tableau:

issues	R	B	V
Probabilités	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2.Probabilité d'un événement

2.1. Définitions

Un événement A est une partie de l'univers E. On note $A\subset E$(«$\subset$»est le symbole de l'inclusion)



Exemple: E={1; 2; 3; 4; 5; 6}

A={2; 4; 6} (A est l'ensemble des chiffres pairs contenus dans E)

Événements particuliers:

- L'ensemble vide: $\varnothing$ est une partie de E.
  $\varnothing$ est l'événement impossible
- L'ensemble plein: E est une partie de E.
  E est l'événement certain

2.2. Probabilité d'un événement

a) Exemple 1

On lance un dé bien équilibré.

E={1; 2; 3; 4; 5; 6}

La loi de probabilité est équirépartie.

A={1; 2; 3}; B={4; 5}; C={6}

La probabilité de l'événement A est la somme des probabilités des éventualités appartenant à A.

On note p(A)= $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

De même, p(B)= $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

p(C)= $\frac{1}{6}$

b) Exemple 2

E={R; B; V} avec les probabilités respectives $\frac{1}{2};\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{6}$

A={R;V}

p(A)= $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

c) Propriété

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des éventualités appartenant à cet événement.

d) Cas particuliers

$p(\varnothing)=0$

$p(E)=1$

e) Loi équirépartie

Les probabilités de toutes les éventualités sont égales, donc pour déterminer la probabilité d'un événement il suffit de déterminer le nombre d'éventualités qui appartiennent à l'événement A et le nombre d'éventualités de l'univers.

$$p(A)=\frac{\text{Nombre d'éventualités dans } A}{\text{Nombre d'éventualités dans } E}$$

2.3. Exercices

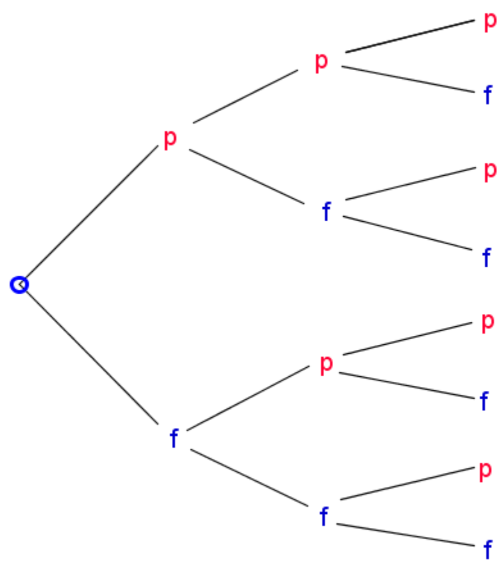
a) On jette 3 fois une pièce de monnaie.

Déterminer la probabilité d'avoir 3 fois pile.

Déterminer la probabilité d'avoir 2 fois pile et une fois face.

Déterminer la probabilité d'avoir au moins 2 fois face.

Pour déterminer l'univers E, on construit un arbre.



L'univers E a huit éléments. On peut noter par exemple: ppp; ppf....

On suppose que la loi de probabilité est équirépartie, c'est à dire que la probabilité de chaque éventualité est $\frac{1}{8}$

Soit A l'événement: « avoir trois pile ». A ne contient qu'un seul élément:ppp.

p(A)= $\frac{1}{8}$

Soit B l'événement: « avoir deux fois pile et une fois face. B={ppf; pfp; fpp}. B contient 3 éléments.

p(B)= $\frac{3}{8}$

Soit C l'événement: « avoir au moins une fois face ». C={ppf; pfp; pff; fpp; fpf; ffp; fff}. C contient 7 éléments.

p(C)= $\frac{7}{8}$

b) On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés, l'un rouge, l'autre bleu. On lance ces deux dés et on fait la somme des numéros obtenus.

Déterminer la loi de probabilité.

Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre strictement supérieur à 6.

Les issues de cette expérience aléatoire sont: 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12.

Pour obtenir 2 il n'y a que 1+1

Pour obtenir 5 il y a 4+1; 3+2; 2+3; 1+4

Donc la loi n'est pas équirépartie.

On revient à l'expérience aléatoire: on lance deux dés l'un rouge l'autre bleu. Les issues sont: (1;1); (1; 2)....

Le premier chiffre est le chiffre obtenu avec le dé rouge.

Le deuxième chiffre est le chiffre obtenu avec le dé bleu.

Pour déterminer l'univers de cette expérience, on utilise un tableau à double entrée:

- sur la première ligne du tableau, on écrit les résultats du dé rouge.
- sur la première colonne du tableau, on écrit les résultats du dé bleu.

Il reste alors 36 cases dans le tableau qui représentent les 36 éventualités de l'expérience. Dans chaque case, on inscrit la somme des deux chiffres.

B \ R	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les dés sont bien équilibrés donc on suppose que la loi de cette expérience est équirépartie donc la probabilité de chaque case est $\frac{1}{36}$

De ces 36 cases, on en déduit la loi de probabilité. Il suffit de compter le nombre de cases pour chaque éventualité.

issues	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilités	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

On note A l'événement : « obtenir un nombre pair ».

On peut compter le nombre de cases du tableau contenant un nombre pair.

Ou, on peut utiliser la loi de probabilité précédente:

$$p(A)= \frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

On note B l'événement: « obtenir un nombre strictement supérieur à 6 ».

On peut compter le nombre de cases du tableau contenant un nombre strictement supérieur à 6.

Ou, on peut utiliser la loi de probabilité précédente:

$$p(B)= \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

2.4. Intersection et réunion d'événements

Nous avons vu dans le chapitre 1 des fonctions la définition de l'intersection et la réunion des deux ensembles.

- L'événement $A\cap B$ se nomme l'événement A et B.
- L'événement $A\cup B$ se nomme l'événement A ou B.
- si $A\cap B=\varnothing$ alors on dit que les événements A et B sont incompatibles.

<u>Exemple:</u>
E={ 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12} avec la loi de probabilité de l'exercice du 3)b)
$A_1=\{3; 5; 7; 9; 11\}$ $B_1=\{2; 3; 4; 5\}$ $C_1=\{2; 8; 12\}$
$A_1\cup B_1=\{2; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$
$A_1\cap B_1=\{3; 5\}$
$A_1\cup C_1=\{2; 3; 5; 7; 8; 9; 11; 12\}$
$A_1\cap C_1=\varnothing$
A_1 et C_1 sont incompatibles.

2 .5. Propriété

Pour tous les événements A et B

$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+p(B)$

<u>Reprise de l'exemple précèdent</u>:

$A_1=\{3; 5; 7; 9; 11\}$

$$p(A_1)= \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18}=\frac{1}{2}$$

$B_1=\{2; 3; 4; 5\}$

$$p(B_1)= \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

$$p(A_1)+p(B_1)= \frac{1}{2}+\frac{5}{18}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$$

$A_1\cup B_1=\{2; 3; 4; 5; 7; 9; 11\}$

$$p(A_1\cup B_1)= \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{22}{36}=\frac{11}{18}$$

$A_1\cap B_1=\{3; 5\}$

$$p(A_1\cap B_1)= \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{3}{18}=\frac{1}{6}$$

On a bien: $P(A_1\cup B_1)+P(A_1\cap B_1)=P(A_1)+p(B_1)$

$C_1=\{2; 8; 12\}$

$p(C_1)= \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$

$p(A_1)+p(C_1)= \frac{1}{2} + \frac{7}{36} = \frac{25}{36}$

$A_1 \cup C_1=\{2; 3; 5; 7; 8; 9; 11; 12\}$

$p(A_1 \cup C_1)= \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{25}{36}$

$A_1 \cap C_1=\varnothing$

$p(A_1 \cap C_1)=0$

On a bien: $P(A_1 \cup C_1)+P(A_1 \cap C_1)=P(A_1)+p(C_1)$

Remarque:

$P(A_1 \cup C_1)=P(A_1)+p(C_1)$

2.6. Événement contraire

A est un événement, on note $\bar{A}$ l'ensemble des éventualités de E n'appartenant pas à A.

$A \cup \bar{A}=E$ et $A \cap \bar{A}=\varnothing$

donc:

$p(A)+p(\bar{A})=1$

Exemple:

$A_1=\{3; 5; 7; 9; 11\}$

$\bar{A}_1=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

$p(A_1)= \frac{1}{2}$

$p(\bar{A}_1)= \frac{1}{36} + \frac{1}{12} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

On a bien: $p(A_1)+p(\bar{A}_1)=1$

$B_1=\{2; 3; 4; 5\}$

$\bar{B}_1=\{6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

$p(B_1)= \frac{5}{18}$

$p(\bar{B}_1)= \frac{5}{36} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{13}{18}$

On a bien: $p(A_1)+p(\overline{A}_1)=1$

$C_1=\{2; 8; 12\}$
$\overline{C}_1=\{3; 4; 5; 6; 7; 9; 10; 11\}$

$p(C_1)=\frac{7}{36}$

$p(\overline{C}_1)=\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{29}{36}$

On a bien: $p(C_1)+p(\overline{C}_1)=1$