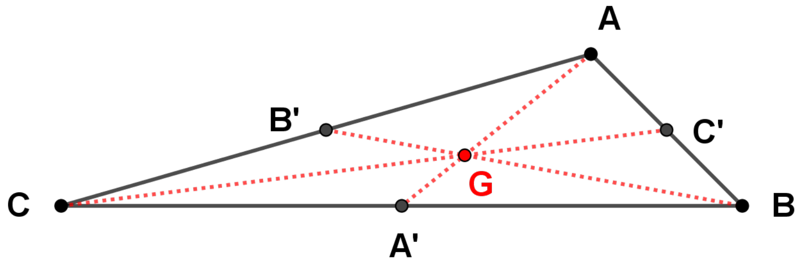
FICHE EXERCICES

EXERCICE 1

On utilise le logiciel géogébra pour effectuer les constructions.
ABC est un triangle quelconque du plan.
On note A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB].
G est le centre de gravité du triangle ABC.



On considère $\mathscr{H}$ l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Déterminer et construire l'image du triangle ABC par $\mathscr{H}$.

2. Déterminer l'image de la hauteur h_A issue de A du triangle ABC par $\mathscr{H}$.

3. Soit H l'orthocentre du triangle ABC.
On note $\mathscr{H}(H) = O$.
Que représente le point O pour le triangle ABC.

4. Déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle ABC par $\mathscr{H}$.
Ce cercle se nomme **cercle d'Euler** du triangle ABC.

5. Soit $\mathscr{H}(O) = O'$.
En déduire que les points G, H, O et O' sont alignés.

6. Déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle ABC par l'homothétie de centre H et de rapport : $\frac{1}{2}$.

EXERCICE 2

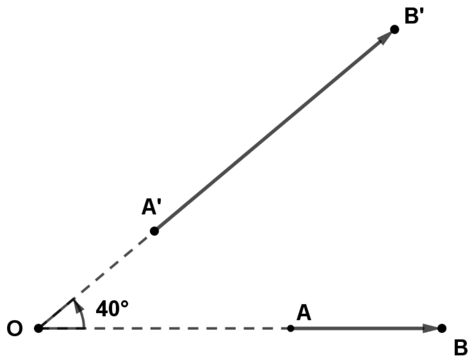
$\mathscr{S}$ est la similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$, de centre I et d'angle de mesure 60°.

1. Pour tout point M du plan, $\mathscr{S}(M)=M'$, démontrer que le triangle IMM' est rectangle en M'.

2. Pour tout point M distinct du point I du plan :
$\mathscr{S}(M)=M_1 \quad \mathscr{S}(M_1)=M_2 \quad \mathscr{S}(M_2)=M_3$
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IM_3}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{IM}$.

EXERCICE 3

On considère les bipoints $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.
$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=40°$ et $\frac{A'B'}{AB}=k$.



1. Tracer (en utilisant le logiciel géogébra) les cercles circonscrits aux triangles OAA' et OBB'.
On note I le point d'intersection distinct de O des deux cercles.

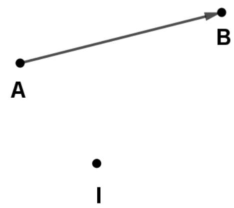
2. Déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IB'}\right)$.

3. Démontrer que les triangles IAB et IA'B' sont semblables.

4. En déduire qu'il existe une similitude plane directe (dont on précisera les caractéristique) qui transforme le bipoint $\overrightarrow{AB}$ en bipoint $\overrightarrow{A'B'}$.

EXERCICE 4

On considère la similitude plane directe $\mathcal{S}$ de centre I d'angle 45° et de rapport 1,2.



1. Construire $\overrightarrow{A'B'}$ l'image du bipoint $\overrightarrow{AB}$ par $\mathcal{S}$, puis $\overrightarrow{A''B''}$ image $\overrightarrow{A'B'}$ par $\mathcal{S}$.

2. Démontrer que les droites (AB) et (A"B") sont orthogonales.

3. Exprimer A"B" en fonction de AB.

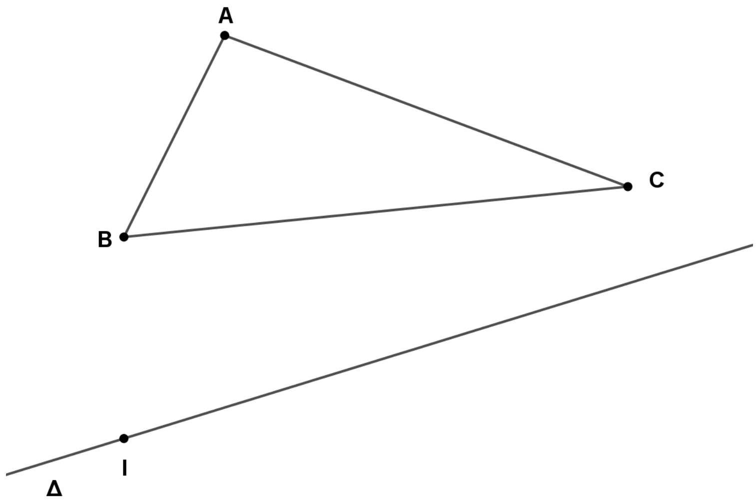
EXERCICE 5

On considère la similitude plane inverse $\mathcal{S}$ de rapport 0,8, de centre I et d'axe Δ.

1. Construire l'image par $\mathcal{S}$ du triangle ABC par $\mathcal{S}$.

2. Construire l'image par $\mathcal{S}$ du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. Construire l'image par $\mathcal{S}$ de l'orthocentre du triangle ABC.



EXERCICE 6

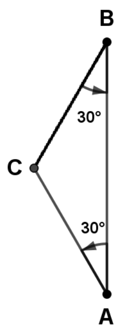
1. I est un point fixé du plan.
Soit M un point quelconque du plan distinct de I, construire les points M' et M'' tels que AMM'M'' soit un carré et $(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM''})=-90°$
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application F telle que F(I)=I et pour tout point M distinct de I, F(M)=M'.

2. I est un point fixé du plan.
Soit M un point quelconque du plan distinct de I, construire le point M' tel que le triangle IMM' soit équilatéral et $(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'})=60°$. On nomme M'' le milieu de [MM'].
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application G telle que G(I)=I et pour tout point M distinct de I, G(M)=M''.

3. I est un point fixé du plan.
Soit M un point quelconque du pan distinct de I, constr uire le point M' tel que le triangle IMM' soit rectangle isocèle en M' et $(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'})=-45°$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application K telle que K(I)=I et pour tout point M distinct de I, K(M)=M'.

EXERCICE 7

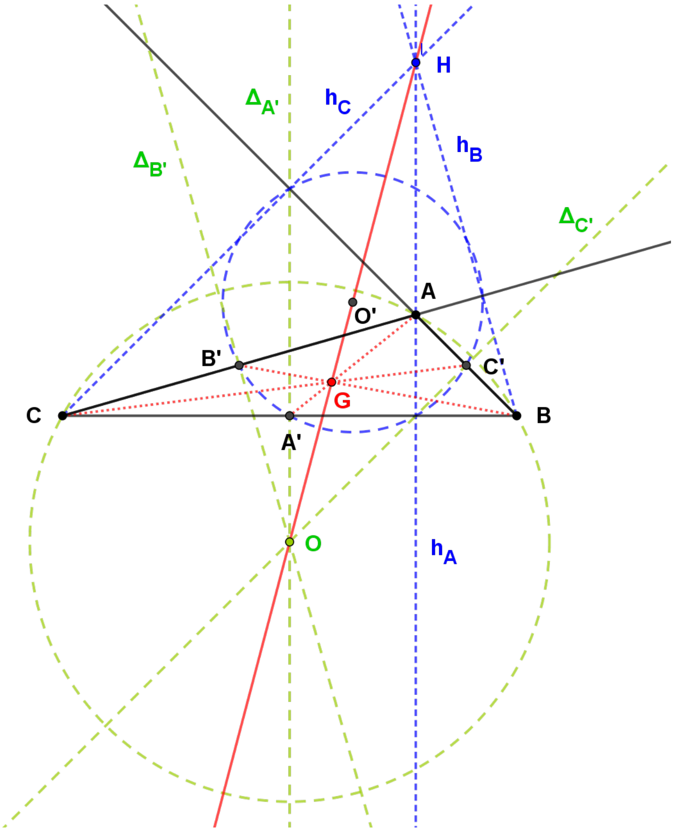
On Considère le triangle ABC isocèle tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=30°$ et $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=30°$.



1. Tracer la droite d_1 perpendiculaire à la droite (AB) en A, et la droite d_2 perpendiculaire à la droite (AC) en A, puis la droite d_3 perpendiculaire à la droite (BC) en B.
Les droites d_1 et d_3 sont sécantes en B' et les droites d_2 et d_3 sont sécantes en C'.
2. Démontrer que les triangles ABC et AB'C' sont semblables.
3. Déterminer une similitude plane directe et ses éléments caractéristiques, transformant le triangle ABC en AB'C'.

CORRECTION

EXERCICE 1



1. G est le centre de gravité du triangle ABC, donc $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}.\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{GA'}=\frac{1}{3}.\overrightarrow{AA'}$ donc $\overrightarrow{GA'}=-\frac{1}{2}.\overrightarrow{GA}$

de même $\overrightarrow{GB'}=-\frac{1}{2}.\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC'}=-\frac{1}{2}.\overrightarrow{GC}$.

Donc $\mathscr{H}$(A)=A' ; $\mathscr{H}$(B)=B' et $\mathscr{H}$(C)=C'.

L'image du triangle ABC par $\mathscr{H}$ est le triangle A'B'C'.

2. h_A est la hauteur dutriangle ABC issue de A donc h_A est perpendiculaire à la droite (BC).

L'image de h_A par $\mathscr{H}$ est la doite parallèle à h_A passant par $\mathscr{H}$(A)=A', on note cette droite : $\Delta_{A'}$.

h_A et $\Delta_{A'}$ sont parallèles et h_A est perpendiculaire à (BC) donc $\Delta_{A'}$ est perpendiculaire à (BC).

Conclusion

$\Delta_{A'}$ est la droite passant par A' (milieu de [BC]) et perpendiculaire à (BC) donc $\Delta_{A'}$ **est la médiatrice de [BC].**

3. On démontre de même que h_B (hauteur du triangle ABC issue de B) a pour image par $\mathscr{H}$ $\Delta_{B'}$ médiatrice de [AC] et l'image de h_C est $\Delta_{C'}$ médiatrice de [AB].

L'orthocentre H du triangle ABC est le point de concours des hauteurs du triangle son image par $\mathscr{H}$ est est le point de concours des médiatrices du triangle ABC.

Donc $\mathscr{H}$(H)=O et **O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.**

4. $\mathscr{H}$(A)=A' ; $\mathscr{H}$(B)=B' et $\mathscr{H}$(C)=C' donc **l'image du cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle circonscrit au triangle A'B'C'.**

Ce cercle se nomme cercle d'Euler du triangle ABC et son centre est $\mathscr{H}$(O)=O'.

5. $\mathscr{H}$(H)=O donc les points G, H et O sont alignés.

$\mathscr{H}$(O)=O' donc les points G, O et O' sont alignés.

Si $G \neq O$ alors les quatre points G, O,H et O' sont alignés et la droite passant par ces quatre points se nomme **droite d'Euler du triangle ABC.**
Si $G=O$ alors $O'=O$ et les points G, O, H et O' sont alignés.
Remarque
Si ABC est un triangle équilatéral alors $G=H=O=O'$.

6. $\mathscr{H}(H)=O$ donc $\overrightarrow{GO}=-\frac{1}{2}.\overrightarrow{GH}$ (1)

$\mathscr{H}(O)=O'$ donc $\overrightarrow{GO'}=-\frac{1}{2}.\overrightarrow{GO}$ (2)

(2) – (1) membre à membre

$$-\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GO'}=-\left(-\frac{1}{2}\right).\overrightarrow{GH}-\frac{1}{2}.\overrightarrow{GO}$$

$$\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GO'}=-\frac{1}{2}.(-\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GO})$$

$$\overrightarrow{OO'}=-\frac{1}{2}.\overrightarrow{HO} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HO'}=-\frac{1}{2}.\overrightarrow{HO} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HO'}=-\overrightarrow{OH}-\frac{1}{2}.\overrightarrow{HO}$$

$$\overrightarrow{HO'}=\overrightarrow{HO}-\frac{1}{2}.\overrightarrow{HO} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{HO'}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{HO}.$$

Donc O' est l'image de O par l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$.

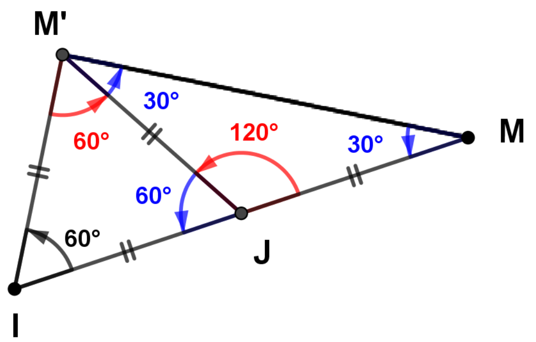
Le rapport de $\mathscr{H}$ est $-\frac{1}{2}$ donc l'image du cercle circonscrit au triangle ABC de rayon R est le cercle de centre $\mathscr{H}(O)=O'$ et de rayon $\frac{1}{2}R$.

L'image du cercle circonscrit au triangle ABC par l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ est le cercle de centre O' et de rayon $\frac{1}{2}R$.

Conclusion
L'image du cercle circonscrit au triangle ABC par l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$ est le cercle circonscrit au triangle A'B'C'.

EXERCICE 2

1.



$\mathscr{S}$ est la similitude plane directe de centre I, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle de mesure 60°.

Pour tout point M distinct de I, $\mathscr{S}(M)=M'$ lel que $IM'=\frac{1}{2}IM$ et $(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'})=60°$.

On note J le milieu de [IM] donc $IJ = JM = \frac{1}{2} IM$ donc $IM' = IJ$.

Le triangle IM'J est isocèle en I et $\widehat{JIM'} = 60°$ donc le triangle IM'J est équilatéral.

Conséquence

$\widehat{IJM'} = 60°$ et $M'J = IJ = JM$

On obtient $\widehat{MJM'} = 180° - 60° = 120°$ et $JM = JM'$ donc le triangle JMM' est isocèle en J .

$\widehat{JMM'} = \widehat{JM'M} = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$.

On a $\widehat{IM'J} = 60°$

Conclusion

$\widehat{IM'M} = \widehat{IM'J} + \widehat{JM'M} = 60° + 30° = 90°$.

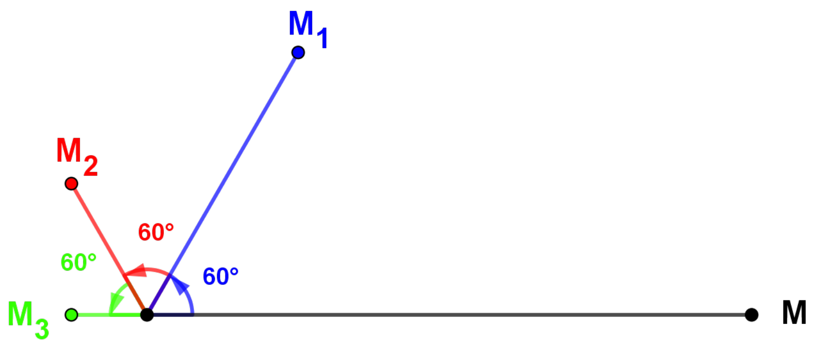
Le triangle IMM' est rectangle en M'.

2. Pour tout point M distinct de I.

$\mathscr{S}(M) = M_1$ donc $(\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM_1}) = 60°$ et $IM_1 = \frac{1}{2} IM$.

$\mathscr{S}(M_1) = M_2$ donc $(\overrightarrow{IM_1}; \overrightarrow{IM_2}) = 60°$ et $IM_2 = \frac{1}{2} IM_1$

$\mathscr{S}(M_2) = M_3$ donc $(\overrightarrow{IM_2}; \overrightarrow{IM_3}) = 60°$ et $IM_3 = \frac{1}{2} IM_2$



$(\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM_3}) = (\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM_1}) + (\overrightarrow{IM_1}; \overrightarrow{IM_2}) + (\overrightarrow{IM_2}; \overrightarrow{IM_3}) = 60° + 60° + 60° = 180°$.

Les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IM_3}$ sont colinéaires et de sens contraires.

$IM_3 = \frac{1}{2} IM_2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} IM_1\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} IM\right) = \frac{1}{8} IM$

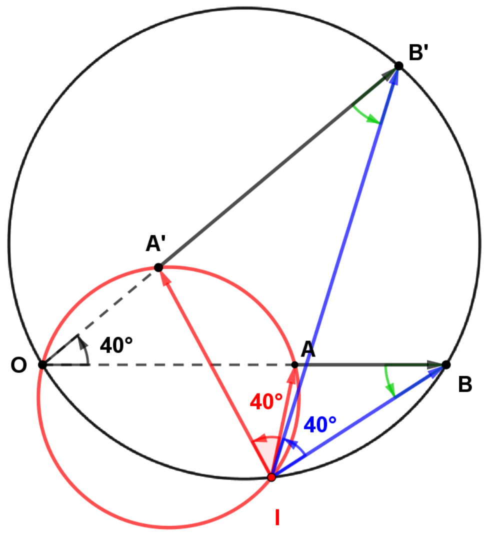
Conclusion

$\overrightarrow{IM_3} = -\frac{1}{8} . \overrightarrow{IM}$

EXERCICE 3

1. La figure est tracée sur la page suivante.

2. Les angles $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IA'})$ et $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OA'})$ sont deux angles inscrits dans le cercle circonscrit au triangle OAA' qui interceptent le même arc, ils ont la même mesure.
Donc $(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IA'}) = 40°$.
Les angles $(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IB'})$ et $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OB'})$ sont deux angles inscrits dans le cercle circonscrit au triangle OBB' qui interceptent le même mesure.
Donc $(\overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IB'}) = 40°$.

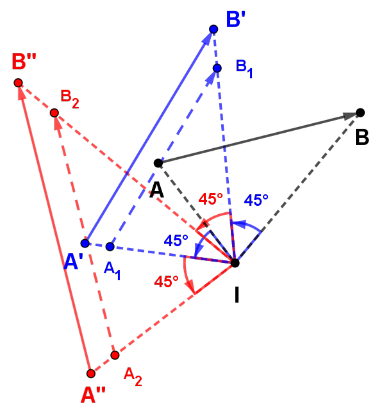


3. Les points B', A' et O sont alignés dans cet ordre donc : $(\overrightarrow{B'A'};\overrightarrow{B'I})=(\overrightarrow{B'O};\overrightarrow{B'I})$.
Les points B, A et O sont alignés dans cet ordre donc : $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BI})=(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BI})$.
Les angles $(\overrightarrow{B'A'};\overrightarrow{B'I})=(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BI})$ sont deux angles inscrits dans le cercle circonscrit au triangle BB'O qui interceptent le même arc, ils ont la même mesure.
Donc $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BI})=(\overrightarrow{B'A'};\overrightarrow{B'I})$.
On considère les triangles IA'B' et IAB.
$\widehat{AIB}=\widehat{A'IB'}=40°$ et $\widehat{ABI}=\widehat{A'IB'}$ donc $\widehat{IAB}=\widehat{IA'B'}=180°-40°-\widehat{AIB}$
Les triangles IA'B' et IAB ont leurs angles égaux deux à deux.
Les triangles IA'B' et IAB sont semblables.

4. Les triangles IAB et IA'B' sont semblables donc les longueurs de leurs sont proportionnelles c'est à dire $\frac{IA'}{IA}=\frac{IB'}{IB}=\frac{A'B'}{AB}=k$.
On obtient $IA'=k\,IA$ et $IB'=k\,IB$
On considère la similitude plane directe $\mathscr{S}$ de centre I et de rapport k et d'angle de mesure 40°.
$(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IA'})=40^\circ$ $IA'=k\,IA$ donc $\mathscr{S}$(A)=A'.
$(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IB'})=40^\circ$ $IB'=k\,IB$ donc $\mathscr{S}$(B)=B'.
<u>Conséquence</u>
L'image du bipoint $\overrightarrow{AB}$ par la similitude plane directe $\mathscr{S}$ est le bipoint $\overrightarrow{A'B'}$.

EXERCICE 4

1.



2. On a $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})=45°$ et $A'B'=1,2\,AB$

$(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A''B''})=45°$ et $A''B''=1,2\,A'B'$

donc $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A''B''})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'})+(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A''B''})=45°+45°=90°$

Conclusion

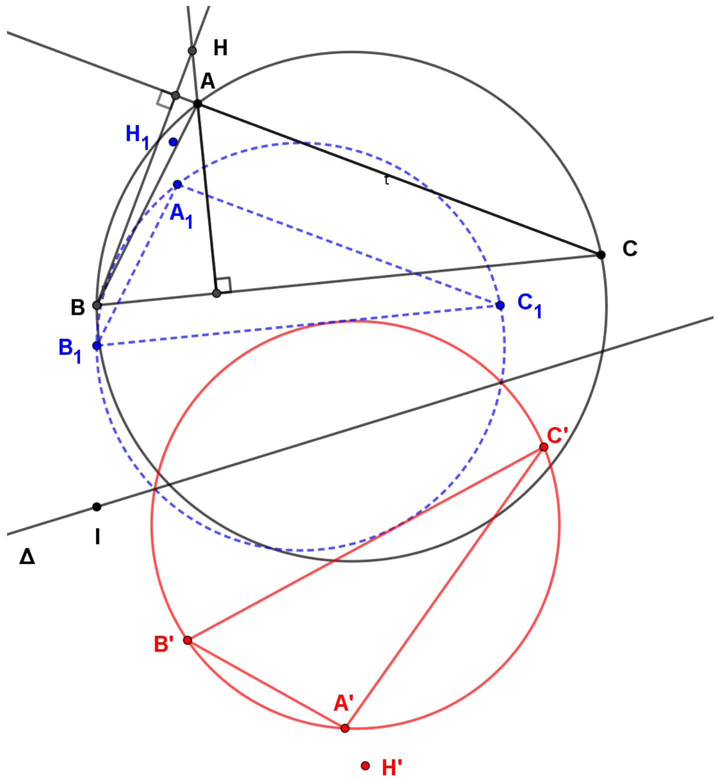
Les droites (AB) et (A''B'') sont orthogonales.

3. $A''B''=1,2\,A'B'=1,2\times(1,2\,AB)=1,44\,AB$

A''B''=1,44AB

EXERCICE 5

1.

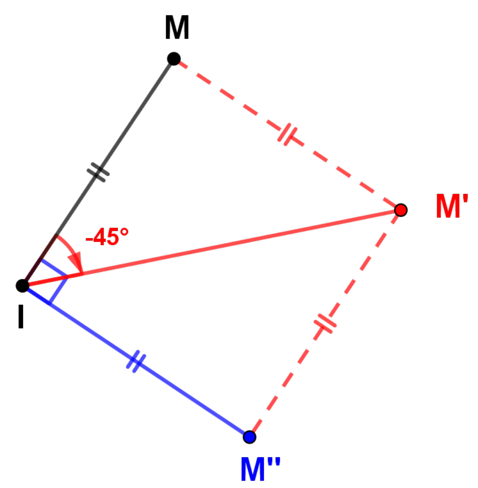


2. L'image du cercle circonscrit du triangle ABC par $\mathscr{S}$ est le cercle circonscrit du triangle A'B'C' ?

3. L'image de l'orthocentre du triangle ABC par $\mathscr{S}$ est l'orthocentre du triangle A'B'C'.
Car une similitude plane directe conserve l'orthogonalité.

EXERCICE 6

1.



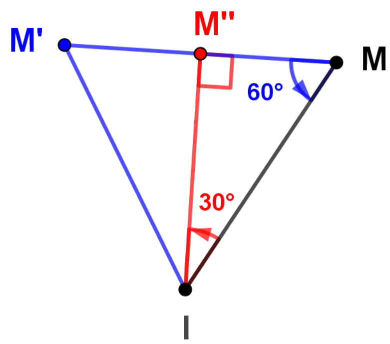
M'' est l'image de M par la rotation de centre I et d'angle de mesure -90°.
M' est l'image de I par la rotation de centre M et d'angle de mesure 90°.
En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle IMM' rectangle en M.

$IM'^2 = IM^2 + MM'^2 = 2IM^2$ donc $IM' = \sqrt{2}IM$

$(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM''}) = -45°$

Donc F est la similitude de centre I et de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure -45°.

2.



M' est l'image de M par la rotation de centre I et d'angle de mesure 60°.
M'' est le milieu de [MM'].

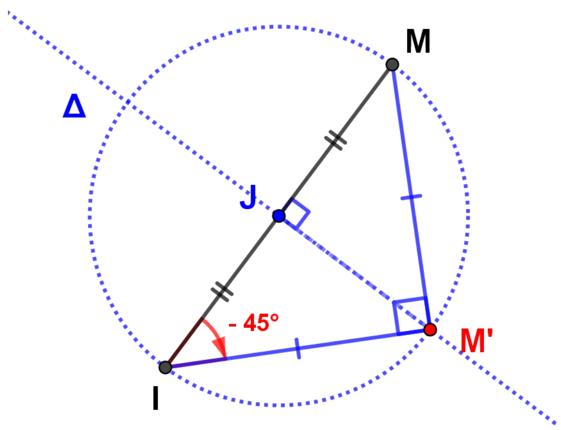
MM'=IM et $MM'' = M'M'' = \frac{1}{2}MM'$.

$IM''^2 + MM''^2 = IM^2 \Leftrightarrow IM''^2 = IM^2 - MM''^2 = IM^2 - \frac{1}{4}IM^2 = \frac{3}{4}IM^2 \quad IM'' = \frac{\sqrt{3}}{2}IM$

$(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM''}) = 30°$

Donc G est la similitude plane directe de centre I et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle de mesure 60°.

3.



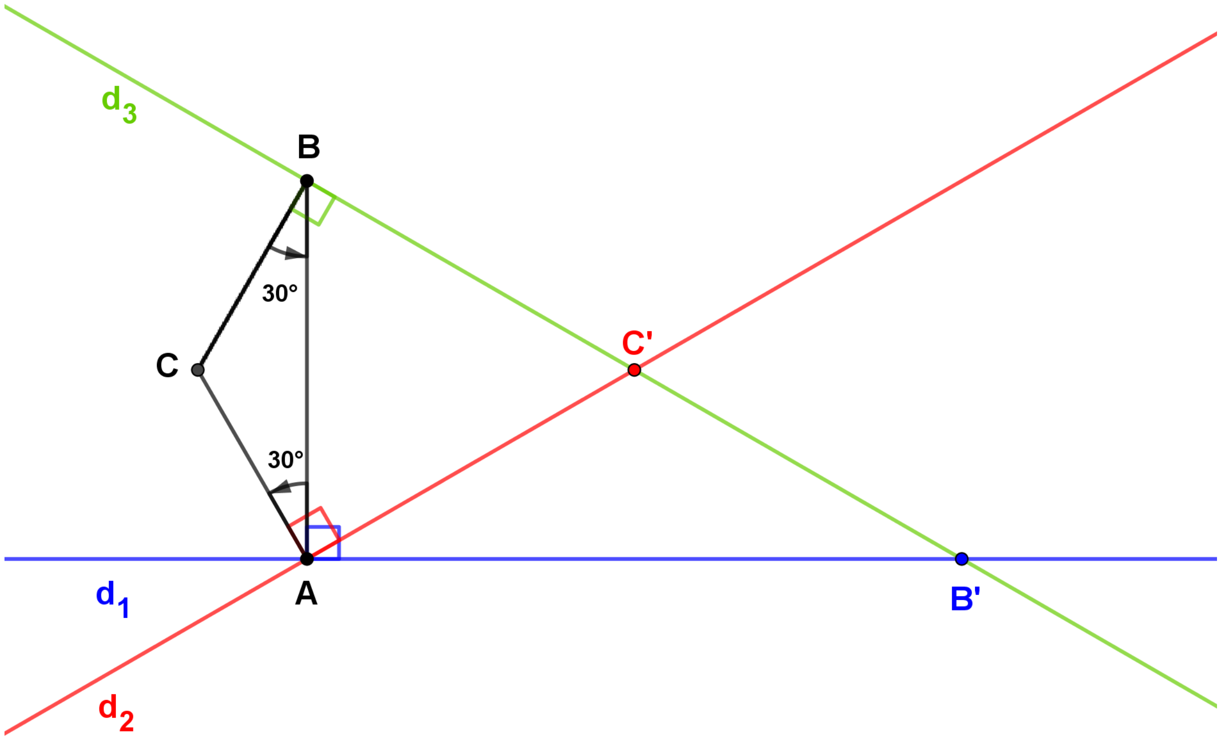
On trace le cercle de diamètre [IM] et la médiatrice Δ du segment [IM].
M' est le point d'intersection du cercle et de la médiatrice vérifiant $(\overrightarrow{IM};\overrightarrow{IM'}) = -45°$.
On a $MM' = IM'$.

$IM^2 = IM'^2 + MM'^2 \Leftrightarrow IM^2 = 2IM'^2 \Leftrightarrow IM'^2 = \frac{1}{2}IM^2 \Leftrightarrow IM' = \sqrt{\frac{1}{2}}IM = \frac{1}{\sqrt{2}}IM = \frac{\sqrt{2}}{2}IM$

K est la similitude plane directe de centre I et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle de mesure $-45°$.

EXERCICE 7

1.



2. On considère le triangle ABC'.

$\widehat{ABC'}=\widehat{ACC'}-\widehat{CBA}=90°-30°=60°$.

$\widehat{BAC'}=\widehat{CAB'}-\widehat{CAB}=90°-30°=60°$

<u>Conséquence</u>

Le triangle ABC' est équilatéral, donc $AB=BC'=AC'$ et $\widehat{AC'B}=\widehat{ABC'}=\widehat{BAC'}=60°$.

Dans le triangle AB'C'

$\widehat{AC'B}=\widehat{BC'B'}-\widehat{BC'A}=180°-60°=120°$.

$\widehat{BA'C'}=\widehat{B'AB}-\widehat{C'AC}=90°-60°=30°$.

Et l'angle $\widehat{C'B'A}=180°-120°-30°=30°$.

Le triangle AB'C' est isocèle en C'.

Dans le triangle ABC

$\widehat{ACB}=180°-120°-30°=30°$

<u>Conclusion</u>

Les triangles ABC et AB'C' ont leurs angles égaux deux à deux, ils sont donc semblables.

3. Les triangles ABC et AB'C' sont semblables donc $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$.

Or $AB=AC'=B'C'$ et $\frac{AB'}{AB}=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{BC}$.

Pour déterminer la valeur du rapport $\frac{AB}{AC}$, on considère le triangle ABC.

Soit J le milieu de [AB].

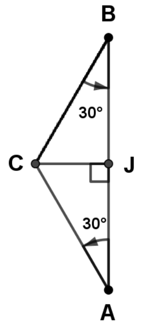
$AJ=BJ=\frac{1}{2}AB$

Dans le triangle AJC $\cos(30°)=\frac{AJ}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $2AJ=\sqrt{3}AC$

Or $AB=2AJ$ donc $AB=\sqrt{3}AC$

Conclusion

$\frac{AB}{AC}=\sqrt{3}$



La similitude plane directe de centre I de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle -90° transforme le triangle ABC en triangle AB'C'.

