Somme de deux vecteurs

1. Remarque

$\Re=(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.

$\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$

La translation de vecteur $\vec{u}$ à A associe B et la translation de vecteur $\vec{v}$ à B associe C.

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_B-x_A\\y=y_B-y_A\end{cases}\qquad\vec{v}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=x_C-x_B\\y'=y_C-y_B\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+x'=(x_B-x_A)+(x_C-x_B)\\y+y'=(y_B-y_A)+(y_C-y_B)\end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases}x+x'=x_C-x_A\\y+y'=y_C-y_A\end{cases}$$

et

$$\overrightarrow{AC}(x_C-x_A;y_C-y_A)\qquad\overrightarrow{AC}(x+x';y+y')$$

2. Définition

$\Re=(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.

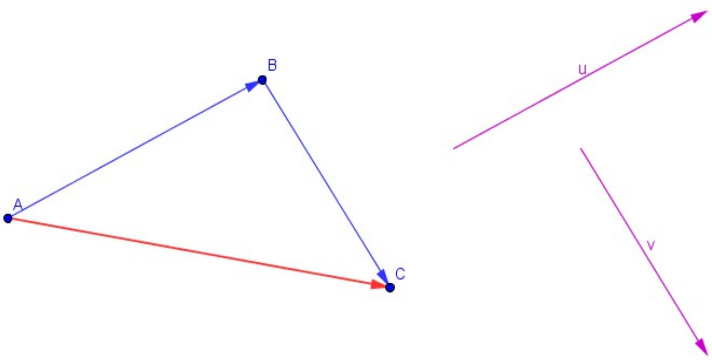
On note somme des vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$,

le vecteur $\vec{w}(x+x';y+y')$

On note $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

3. Conséquence : Relation de Chasles

Si la transformation de vecteur $\vec{u}$ à A associe B et la la transformation de vecteur $\vec{v}$ à B associe C alors la transformation de vecteur $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ à A associe C tel que : $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
Relation de Chasles

4. Propriétés

- La translation de vecteur $\vec{v}$ à C associe D et la translation de vecteur $\vec{u}$ à D associe F

  $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ $\vec{u}=\overrightarrow{DF}$ d'après la relation de Chasles: $\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{CF}$

  $\vec{v}(x';y')$ $\vec{u}(x;y)$

  $x'=x_D-x_C$ $x=x_F-x_D$

  $y'=y_D-y_C$ $y=y_F-y_D$

  $\overrightarrow{u+v}(x+x';y+y')$

  $x+x'=x_F-x_C$ $y+y'=y_F-y_C$

  $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{CF}$

  Donc $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

- La transformation de vecteur $\vec{u}$ à A associe B et la la transformation de vecteur $\vec{v}$ à B associe C.

  La transformation de vecteur $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ à A associe C tel que : $\vec{w}=\overrightarrow{AC}$

  Si $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ et B=C

  $\vec{u}+\vec{0}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

  $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

  $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

- Opposé d'un vecteur

  Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(-x;-y)$ alors $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}(0;0)$

  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ donc A = C et $\vec{v}=\overrightarrow{BA}$

  $\vec{v}\, est\, l'\, opposé\, du\, vecteur\, \vec{u}$

  $Si\, \vec{u}=\overrightarrow{AB}(x;y)\, alors\, \vec{v}=\overrightarrow{BA}(-x;-y)$

- Si $\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3}$ sont trois vecteurs du plan alors

  $(\vec{u_1}+\vec{u_2})+\vec{u_3}=\vec{u_1}+(\vec{u_2}+\vec{u_3})$

  On vérifie facilement ce résultat en considérant les coordonnées des vecteurs.

5. Construction géométrique de la somme de deux vecteurs

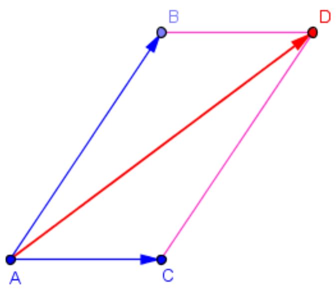
Somme de deux vecteurs lorsque l'on choisit 2 représentants ayant la même origine.

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

On choisit D tel que $\vec{v}=\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$

et ABDC est un parallélogramme

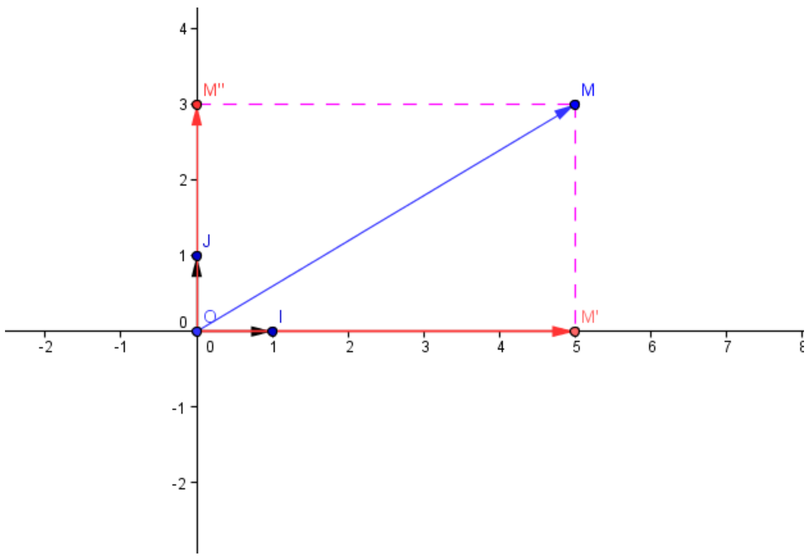
$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$



<u>Cas particulier</u>

$\Re=(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ repère du plan.

$\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ $M(x\,;y)$ $M'(x'\,;0)$ $M''(0\,;y')$



OM'MM'' est un rectangle et

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{OM''}$$