Mesures et longueurs des ars de cercles
Cosinus et sinus d' un nombre réel

1. Rappels

1.1. Mesure en degré d'un arc de cercle

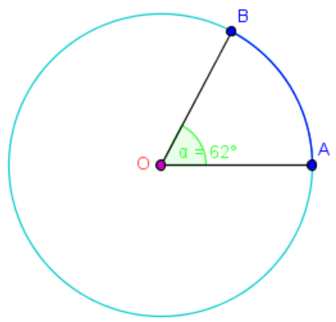
L'unité de mesure des angles est le degré.

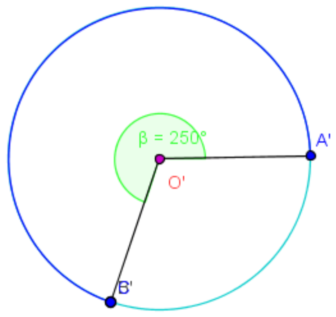
$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon R.

La mesure de l'arc de cercle est la mesure de l'angle au centre qui intercepte cet arc.

(Remarque : L'angle au centre peut être rentrant.)

Exemples :





1.2. Longueur d'un arc de cercle

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon R.

- ✔ La longueur du cercle est $2\pi R$, d'un demi cercle est πR et d'un quart de cercle est $\frac{\pi}{2}R$
- ✔ La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui intercepte cet arc (donc la mesure de cet arc).

Si x est la mesure en degré de l'angle au centre : $\widehat{AOB}$ alors x est la mesure en degré de l'arc AB

Soit l la longueur de l'arc AB (en unité de longueur)

$$l = x \times \frac{2\pi R}{360}$$

Exemples :

$x = 90°$	$l = \frac{\pi}{2}R$
$x = 60°$	$l = \frac{\pi}{3}R$
$x = 240°$	$l = \frac{4\pi}{3}R$

✔ Cas particulier : R = 1

$$l = x \times \frac{\pi}{180}$$

Valeurs usuelles :

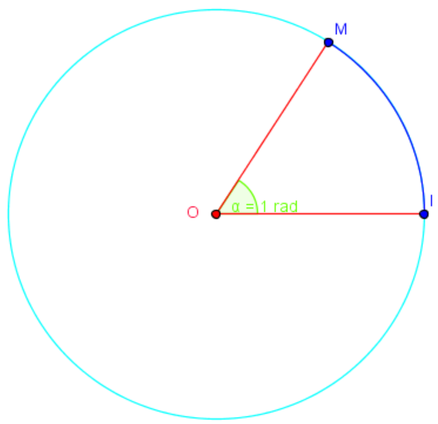
Mesure en degré des arc	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
Longueurs des arcs	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

2. Nouvelle unité de mesure des angles

2.1. Définition

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Un angle au centre qui intercepte un arc de longueur égal au rayon du cercle a pour mesure 1 radian (symbole rad)



La mesure de l'arc IM est égale à l'unité de longueur.

La mesure d'un angle plat en radians est : π

2.2. Arc de cercle

✔ $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon R.

Si α est la mesure en radians d'un arc (ou de l'angle au centre qui intercepte cet arc) et l la longueur de cet arc.

$$l = R\alpha$$

✔ Si de plus R = 1

$$l = \alpha$$

<u>**Conséquence**</u> :

La mesure en radians d'un arc d'un cercle de rayon 1 est égale à la longueur de cet arc

3. Enroulement de la droite numérique sur un cercle trigonométrique.

3.1. Orientation d'un cercle

Il existe 2 sens de parcours sur un cercle du plan.

Orienter un cercle c'est choisir sur ce cercle un sens que l'on nomme **sens direct (ou positif).** L'autre sens est nommé **sens indirect (ou négatif)**

Par convention : le sens contraire du déplacement « des aiguilles d'une montre » est choisi comme sens direct.

Remarque :

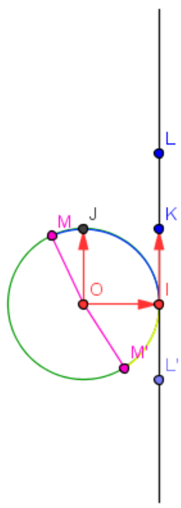
Pour le logiciel géogébra, le sens positif est nommé sens « antihoraire ».

Le sens négatif est nommé sens « horaire ».

3.2. Définition d'un cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique est un cercle de centre O, de rayon 1 et orienté dans le sens direct.

3.3. Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique



$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique

$\vec{OI}=\vec{i}$; $\vec{OJ}=\vec{j}$; $\vec{OK}=\vec{k}$

$OI=OJ=IK=1$

On note x l'abscisse d'un point L de (IK) c'est à dire

$\vec{IL}=x\,\vec{IK}=x\,\vec{k}$

ou si $L\in[IK)$ alors $x=IL$

ou si $L\notin[IK)$ alors $x=-IL$

La droite (IK) représente l'ensemble des nombres réels.

On nomme cette droite : **droite numérique**

On suppose que l'on enroule la droite numérique autour du cercle trigonométrique.

L vient en coïncidence avec le point M de $\mathscr{C}$.

$x=IL$ et la longueur de l'arc IM est x (ou la mesure en radians)

L' vient en coïncidence avec le point M' de $\mathscr{C}$

$x'=-IL'$ et la longueur de l'arc IM' est $-x'$ (ou la mesure en radians)

3.4. Remarque

La longueur d'un cercle trigonométrique est : 2π

Si on considère le point N de (IK) d'abscisse : $x+2\pi$, ce point vient aussi en coïncidence avec M lorsque l'on enroule la droite numérique sur $\mathscr{C}$

Soit R et S deux points de (IK) qui viennent en coïncidence avec M. Lorsque l'on enroule la droite numérique sur $\mathscr{C}$ alors
$x_R - x_S = k\times 2\pi$ k étant un entier relatif

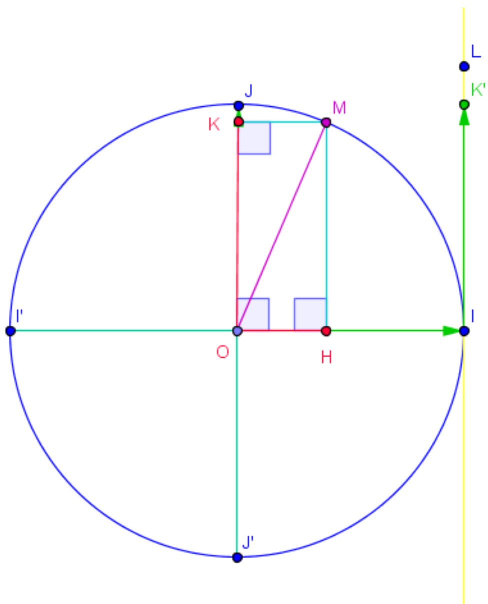
<u>Conséquence</u>
L'abscisse d'un point de (IK) venant en coïncidence avec M est :
$x+2k\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$

4. Définition

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.

$\overrightarrow{OI}=\vec{i}$; $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$

$(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan.



x est un nombre réel quelconque.
L est le point d'abscisse x de (IK') : $\overrightarrow{IL}=x\overrightarrow{IK'}$
M est le point du cercle $\mathscr{C}$ qui vient en coïncidence avec L lorsque l'on enrobe (IK') sur $\mathscr{C}$

Une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en radians est x

***Le cosinus** du nombre réel x que l'on nomme $\cos x$ est l'abscisse du point M dans $(O;\vec{i};\vec{j})$*

(ou l'abscisse de H dans le repère $(O;\vec{i})$ de la droite (OI)

***Le sinus** du nombre réel x que l'on nomme $\sin x$ est l'ordonnée du point M dans $(O;\vec{i};\vec{j})$*

(ou l'abscisse de K dans le repère $(O;\vec{j})$ de la droite (OK)

Donc $M(\cos x;\sin x)$

$\overrightarrow{OM}=(\cos x)\vec{i}+(\sin x)\vec{j}$

$H(\cos x;0)$ $\overrightarrow{OH}=(\cos x)\vec{i}$

$K(0;\sin x)$ $\overrightarrow{OK}=(\sin x)\vec{j}$

5. Remarque

Lorsque $0<x<\frac{\pi}{2}$

On considère OMH rectangle en H

$\cos\widehat{HOM}=OH$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ donc $OH=\cos x$

et $\cos\widehat{HOM}=\cos x$ (Rappel : x est une mesure de l'angle $\widehat{HOM}$ en radians)

$\sin\widehat{HOM}=\frac{MH}{OM}$ or OM = 1 $\sin\widehat{HOM}=MH$

Le quadrilatère OHMK est rectangle donc MH=OK $\sin\widehat{HOM}=OK$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ donc $OK=\sin x$ et $\sin\widehat{HOM}=\sin x$

6. Valeurs remarquables

- ✔ Si L = I alors M = I et $x=0$

  $I(1;0)$ dans $(O;\vec{i};\vec{j})$

  $\cos 0=1$ et $\sin 0=0$

- ✔ Si M = J, on peut choisir L tel que $\overrightarrow{IL}=\frac{\pi}{2}.\overrightarrow{IK'}$

  Donc $x=\frac{\pi}{2}$

  $J(0;1)$ dans $(O;\vec{i};\vec{j})$

$\cos\frac{\pi}{2}=0$ et $\sin\frac{\pi}{2}=1$

✔ Nous avons vu dans le premier chapitre de cours de trigonométrie que :

- $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$
- $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

✔ On donne souvent ces résultats sous le forme de tableau.

Mesure des angles	**0°**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cosinus	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**
sinus	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**

7. Propriétés

Pour tout réel x *on a*

✔ $-1\leq\cos x\leq 1$ *et* $-1\leq\sin x\leq 1$ *(a)*

✔ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ *(b)*

✔ $\cos(x+2\pi)=\cos x$ *(c)*

$\sin(x+2\pi)=\sin x$

✔ $\cos(-x)=\cos(x)$ *(d)*

$\sin(-x)=-\sin(x)$

(a)

✔ Le triangle rectangle OMH est rectangle en H

Donc $OH\leq OM$ (OM est l'hypoténuse du triangle rectangle)

$OH\leq 1$

Donc l'abscisse de H dans le repère $(O;\vec{i})$ est comprise entre -1 et 1

C'est à dire $-1\leq\cos x\leq 1$

✔ De même le triangle OMK est rectangle en K.

Donc $OK \leq OM$
$OK \leq 1$

Donc l'abscisse de K dans le repère $(O; \vec{j})$ est comprise entre -1 et 1

C'est à dire $-1 \leq \sin x \leq 1$

(b)

Nous avons vu $\cos x = OH$ ou – OH et $\sin x = OK$ ou – OK

Donc $\cos^2 x = OH^2$ et $\sin^2 x = OK^2$

Le triangle rectangle OHM est rectangle en H

$OH^2 + MH^2 = OM^2$ or MH =OK

$OH^2 = \cos^2 x$ $MH^2 = OK^2 = \sin^2 x$ et $OM^2 = 1$

Donc $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

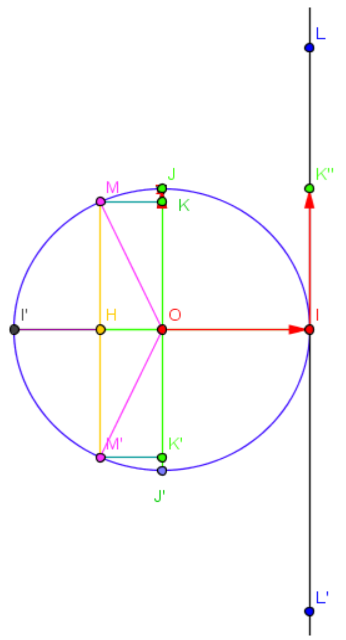
(c)

Les points L d'abscisse x sur (IK') et N d'abscisse $x + 2\pi$ coïncident avec le même point de $\mathscr{C}$

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

On dit que cos et sin sont des fonctions périodiques de période 2π

(d)



L d'abscisse x sur (IK'')
L' d'abscisse $-x$ sur (IK'')

L coïncide avec M sur $\mathscr{C}$
L coïncide avec M' sur $\mathscr{C}$
On constate que les points M et M' sont symétriques par rapport à (OI)

Donc H = H' et K=K' sont symétriques par rapport à (OI)

Donc $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

On dit que la fonction **cosinus** est **paire**.
On dit que la fonction **sinus** est **impaire**.

8. Tangente d'un nombre réel

La tangente d'un nombre réel n'est pas un objectif du programme de seconde.

Remarque :

$$\cos x=0 \Leftrightarrow (M=J \; ou \; M=J') \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ ou \\ x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \end{cases}$$

Définition :

Si $\cos x \neq 0$ alors $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$