Vecteurs colinéaires

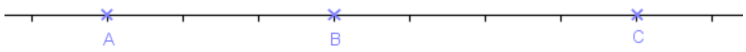
1. Remarque

- ✔ Si les points A;B;C sont alignés et si $A \neq B$ alors il existe un réel λ tel que

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$$

- ✔ Si $C \in [AB)$ alors $\lambda = \dfrac{AC}{AB}$

Exemple (On place les points A;B;C sur une droite graduée)

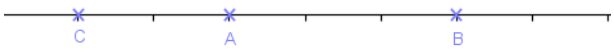


$$\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{3}$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$$

- ✔ Si $C \in (AB)$ et $C \notin [AB)$ alors $\lambda = -\dfrac{AC}{AB}$

Exemple



$$\lambda = -\frac{AC}{AB} = -\frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

- ✔ Si C = A alors $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ et $\lambda = 0$ $\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB}$

2. Définition

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un réel λ tel que :

$$\vec{v} = \lambda \vec{u}$$

3. Remarque

- ✔ Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- ✔ $\Re = (O ; \vec{i} ; \vec{j})$ est un repère du plan. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ alors **les points O, M et N sont alignés.**

4. Propriétés

✔ ***Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et non nuls alors***
$(AB)//(CD)$

Preuve :

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}=\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ (ABMO est un parallélogramme)

Donc $(AB)//(OM)$

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ (CDNO est un parallélogramme)

Donc $(CD)//(ON)$

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires donc O, M, N sont alignés et (OM)=(ON)

Conclusion : $(AB)//(CD)$

✔ ***Si $(AB)//(CD)$ alors***
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Preuve :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{ON}$ donc $(OM)//(ON)$

et les points O, M, N sont alignés

et Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OM}$

soit $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

✔ ***Les points A, B, C sont alignés si et seulement si***
les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Preuve :

- Si A = B ou A = C alors le résultat est immédiat.
- Si A $\neq$ B et A $\neq$ C
  - Si A, B, C sont alignés alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
  - Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors A, B, C sont alignés. (Cas $(AB)//(AC)$)

5. Théorème

$\mathfrak{R}=(O;\vec{i};\vec{j})$ est un repère du plan.

Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{u'}(x';y')$ sont colinéaires si et seulement si :

$xy'-x'y=0$

Preuve

. Si $\vec{u}$ est le vecteur nul alors $x=y=0$ et les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et on a :
$xy'-x'y=0\times x-y\times 0=0$.

. Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul et si $x=0$ (donc $y\neq 0$) alors $xy'-x'y=0 \Leftrightarrow 0\times y'-x'y=0$
$\Leftrightarrow x'y=0 \Leftrightarrow x'=0$ et les vecteurs $\vec{u}(0;y)$ et $\vec{v}(0;y')$ sont colinéaires.

. Si $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul et si $x\neq 0$ alors $xy'-x'y=0 \Leftrightarrow y'=\frac{x'}{x}y$.

On pose $\frac{x'}{x}=\lambda$ donc $x'=\lambda x$ et $y'=\lambda y$ on obtient $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

. Réciproquement :
Si $\vec{v}=\lambda\vec{u}$ alors $x'=\lambda x$ et $y'=\lambda y$ et $xy'-x'y=x\lambda y-\lambda xy=0$

6. Définition

On considère le repère $\mathscr{R}=(O;\vec{i};\vec{j})$.
$\vec{u}(x;y)$ $\vec{v}(x';y')$
On nomme déterminant du couple de vecteurs $(\vec{u};\vec{v})$ le nombre réels :
$$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$$

Conséquence
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v})=0$.

Exemple
$\vec{u}(3;7)$ $\vec{v}(11;a)$
Déterminer la valeur de a pour laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
$$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 7 & a \end{vmatrix}=3a-7\times 11=0 \Leftrightarrow 3a=77 \Leftrightarrow a=\frac{77}{3} .$$