Suites usuelles

1. Suites arithmétiques

1.1. Définition

On nomme suite arithmétique de raison r appartenant à $\mathbb{R}$ toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et pour tout entier naturel n (ou pour tout entier naturel non nul) :

$u_{n+1}=u_n+r$

1.2. Terme général

Pour tout entier naturel n : $u_n=u_0+nr$
Pour tout entier naturel non nul n : $u_n=u_1+(n-1)r$
Pour tous entiers naturels n et p : $u_n=u_p+(n-p)r$

1.3. Variations

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=r$.

- Si r=0 alors la suite (u_n) est **constante.**
- Si $r>0$ alors la suite (u_n) est **strictement croissante.**
- Si $r<r$ alors la suite (u_n) est **strictement décroissante.**

1.4. Limite d'une suite arithmétique

$u_n=u_0+nr$

- Si $r=0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=u_0$
- Si $r>0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$
- Si $r<0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

1.5. Exemples

1.5.a. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0=1$ et de raison r = 0,5.

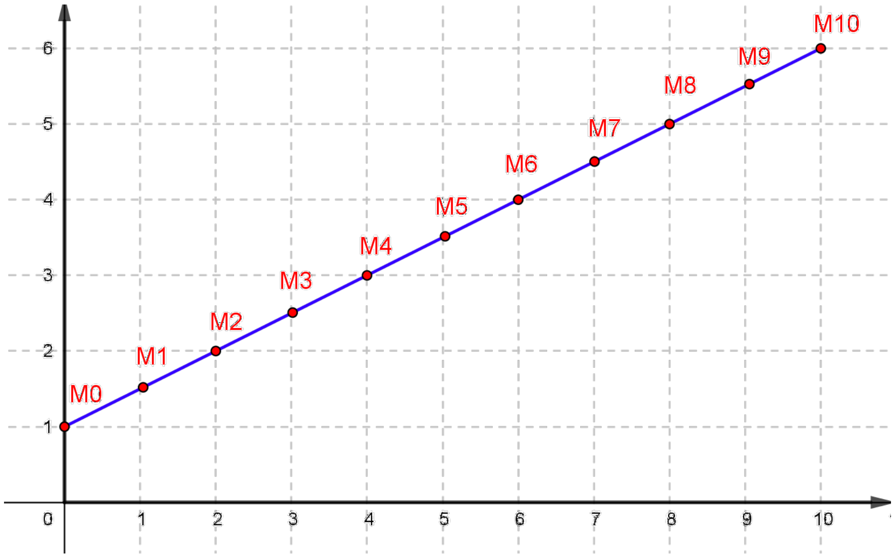
Donc pour tout entier naturel n : $u_n=1+0{,}5^n$.

0,5 > 0 donc (u_n) est strictement croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

<u>Représentation graphique</u>

Pour i entier naturel $M_i(i;u_i)$.

Les points M_i appartiennent à la droite d'équation : y= 0,5x+1 .



1.5.b. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0=3$ et de raison r = -0,6.

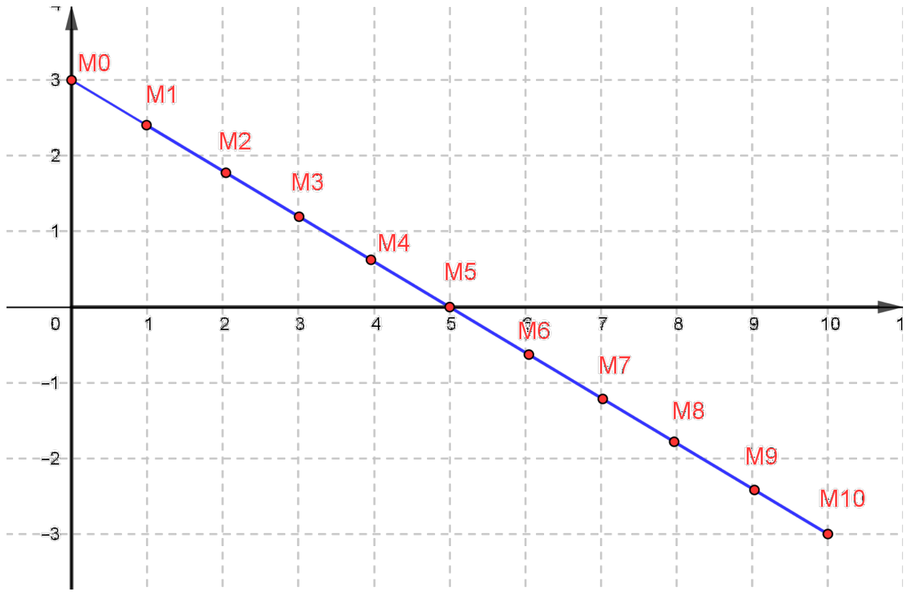
Donc pour tout entier naturel n : $u_n=3-0{,}6\,n$.

-0,6 < 0 donc (u_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

<u>Représentation graphique</u>

Pour tout i entier naturel : $M_i(i\,;u_i)$

Les points M_i appartiennent à la droite d'équation : y = -0,6x+3.



1.6. Remarque

(u_n) est une suite arithmétique si et seulement si pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1}=\dfrac{u_n+u_{n+2}}{2}$.

C'est à dire ; **si on considère trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors le terme du milieu est la moyenne arithmétique des deux autres.**

<u>Preuve</u>

Pour tout entier naturel n, u_n, u_{n+1} et u_{n+2} sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, $u_{n+1}=u_n+r$ et $u_{n+2}=u_n+2r$.

$$\frac{u_n+u_{n+2}}{2}=\frac{u_n+u_n+2r}{2}=\frac{2(u_n+1)}{2}=u_n+r=u_{n+1}$$

1.7. Somme des premiers termes

(u_n) esr la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

$$S=u_0+u_1+\ .\ .\ .\ +u_n=(n+1)\times\frac{u_0+u_n}{2}$$

La somme contient (n+1) termes.

$$S=(\text{nombre de termes})\times\frac{\text{premier terme + dernier terme}}{2}$$

1.8. Exercice

(u_n) est la suite arithmétique de terme $u_0=-2$ et de raison 3.

- Exprimer u_n en fonction de n.
- Calculer : $u_{29}+u_{30}+u_{31}$.
- Calculer : $S=u_0+u_1+\ .\ .\ .\ +u_{19}$

Correction

- $u_n=u_0+nr$

  u_n **= -2+3n**

- Remarque : $u_{30}=\frac{u_{29}+u_{31}}{2}$ donc $2u_{30}=u_{29}+u_{31}$ et $u_{29}+u_{30}+u_{31}=3u_{30}$.

  $u_{30}=-2+3\times30=88$

  $u_{29}+u_{30}+u_{31}=3\times88$ = **264 .**

- $S=u_0+u_1+\ .\ .\ .\ +u_{19}$

  La somme contient 20 termes.

  $S=20\times\frac{u_0+u_{19}}{2}$

  $u_{19}=-2+3\times19=55$

  $u_0=-2$

  $S=20\times\frac{-2+55}{2}=20\times\frac{53}{2}=10\times53$ = **530.**

2. Suites géométriques

2.1. Définition

On nomme suite géométrique de raison q appartenant à $\mathbb{R}$ toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et pour tout entier naturel n (ou tout entier naturel non nul) par : $u_{n+1}=q\,u_n$.

$(f(u_n)=u_{n+1}$ avec $f(x)=q\,x)$

2.2. Terme général

. Pour tout entier naturel n : $u_n=u_0 q^n$

. Pour tout entier naturel non nul : $u_n=u_1 q^{n-1}$

. Pour tous entiers naturels n et p : $u_n=u_p q^{n-p}$

2.3. Signe des termes d'une suite géométrique

$u_n=u_0 q^n$

On suppose $u_0\neq 0$ et $q\neq 0$.

2.3.a. Si q > 0 alors pour tout entier naturel n $q^n > 0$

exemples : $3^n > 0$ ou $0{,}5^n > 0$

. <u>Conséquence</u>

Si q > 0 alors pour tout entier naturel n, le signe de u_n et le signe de u_0 .

. <u>Exemples</u>

$u_n=-4\times 3^n$ $(u_0=-4$ et $q=3)$ pour tout entier naturel n : $-4\times 3^n < 0$.

$v_n=5\times 0{,}5^n$ $(v_0=5$ et $q=0{,}5)$ pour tout entier naturel n : $v_n=5\times 0{,}5^n>0$

2.3.b. Si q < 0 alors le signe de q^n dépend de la parité de n

. <u>Exemples</u>

$(-2)^n$ (q=-2)

$(-2)^1=-2$; $(-2)^2=4$; $(-2)^3=-8$ ...

. <u>Conséquence</u>

Si q < 0 alors le signe de u_n dépend de la parité de n.

Si n est pair alors le signe de u_n est le signe de u_0 .

Si n est impair alors le signe de u_n est le signe contraire de u_0 .

2.4. Variations d'une suite géométrique

On suppose $u_0\neq 0$ et $q\neq 0$.

Pour tout entier naturel n, on détermine le signe de la différence : $u_{n+1}-u_n$.

Or $u_{n+1}=q\,u_n$ donc $u_{n+1}-u_n=q\,u_n-u_n=(q-1)\,u_n$.

2.4.a. Si q < 0 alors le signe de u_n dépend de la parité de n donc la suite (u_n) n'est pas monotone.

2.4.b. Si q > 0 alors le signe de u_n est le signe de u_0 et q-1 < 0, si q > 1 et q-1 > 0, si q < 1.

. Si q > 1 et $u_0 > 0$ alors la suite est **strictement croissante.**

. Si q > 1 et $u_0 < 0$ alors la suite est **strictement décroissante.**

. Si 0 < q < 1 et $u_0 > 0$ alors la suite est **strictement décroissante.**

. Si 0 < q < 1 et $u_0 < 0$ alors la suite est **strictement croissante.**

2.4.c. Cas particulier : q =1.

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=u_n$, la suite est constante et $u_n=u_0$.

2.5. Limite d'une suite géométrique

2.5.a. Limite de q^n

- On admet que si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$
- Si $0 q < 1$ alors $1 < \frac{1}{q}$ et $\left(\frac{1}{q}\right)^n=\frac{1}{q^n}$

  donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n}=+\infty$ et l'inverse $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.
- Si $q = 1$ alors $q^n=1$ et $\lim_{n\to+\infty} q^n=1$.
- Si $q = 0$ alors $q^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$
- Si $-1 < q < 0$ alors $0 < -q < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} (-q)^n=0$

  or $(-q)^n=(-1)^n\times q^n$ donc $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.
- Si $q = -1$ alors $q^n=(-1)^n$

  Si n est pair alors $q^n=1$

  Si n est impair alors $q^n=-1$

  et q^n n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.
- Si $q < -1$ alors $1 < -q$ et $\lim_{n\to+\infty} (-q)^n=+\infty$

  $(-q)^n=(-1)^n\times q^n$

  donc q^n n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2.5.b. Limite de u_n

On suppose $u_0\neq 0$

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=0$ c'est à dire (u_n) **converge vers 0.**
- Cas particulier : q = 1 (suite constante) alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=u_0$ c'est à dire (u_n) **converge vers** u_0 **.**
- Si $q > 1$ et $u_0>0$ (resp. $u_0<0$) alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ (resp. $-\infty$).
- Si $q \leqslant -1$ alors (u_n) n'admet pas de limite.

2.6. Exemples

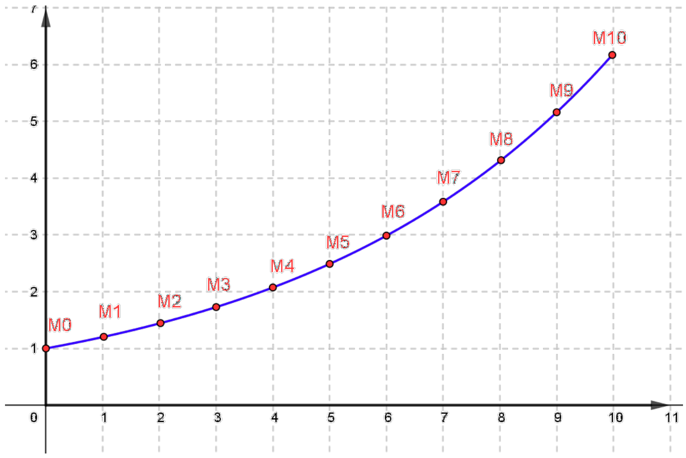
2.6.a. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison : q=1,2

$q > 1$ et $u_0 > 0$ donc la suite est strictement croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

<u>Représentation graphique</u>

$M_i(i;u_i)$

Les points M_i appartiennent à la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x)=1{,}2^x$.



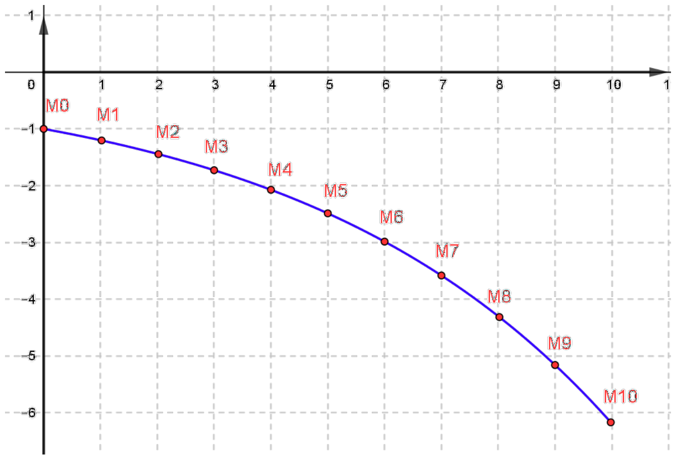
2.6.b. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=-1$ et de raison : q = 1,2.

$q > 1$ et $u_0<0$ donc la suite est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

Représentation graphique

$M_i(i;u_i)$

Les points M_i appartiennent à la courbe représentative de la fonction g définie par $g(x)=-1{,}2^x$.



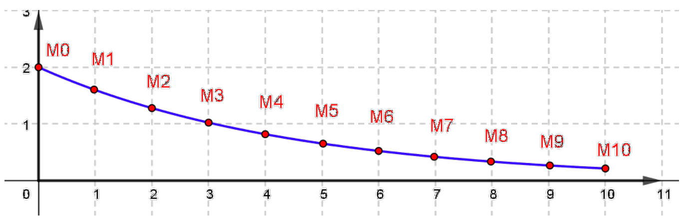
2.6.c. (u_n) est la suite géométrique depremier terme $u_0=2$ et de raison : q = 0,8.

$0 < q < 1$ et $u_0>0$ donc la suite est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Représentation graphique

$M_i(i;u_i)$

Les points M_i appartiennent à la courbe représentative de la fonction g définie par : $g(x)=2\times0{,}8^x$.



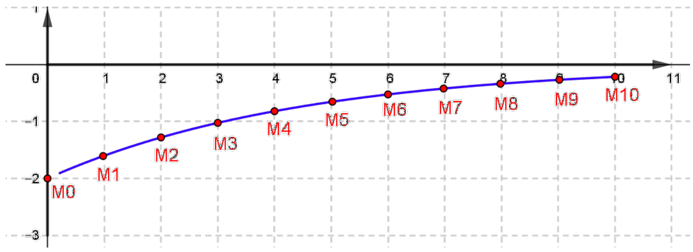
2.6.d. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=-2$ et la raison q=0,8.

$0 < q < 1$ et $u_0<0$ donc la suite est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

Représentation graphique

$M_i(i;u_i)$

Les points M_i appartiennent à la courbe représentatve de la fonction g définie par $g(x)=-2\times 08^x$.



2.6.e. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=1$ et de raison q = -1,2.

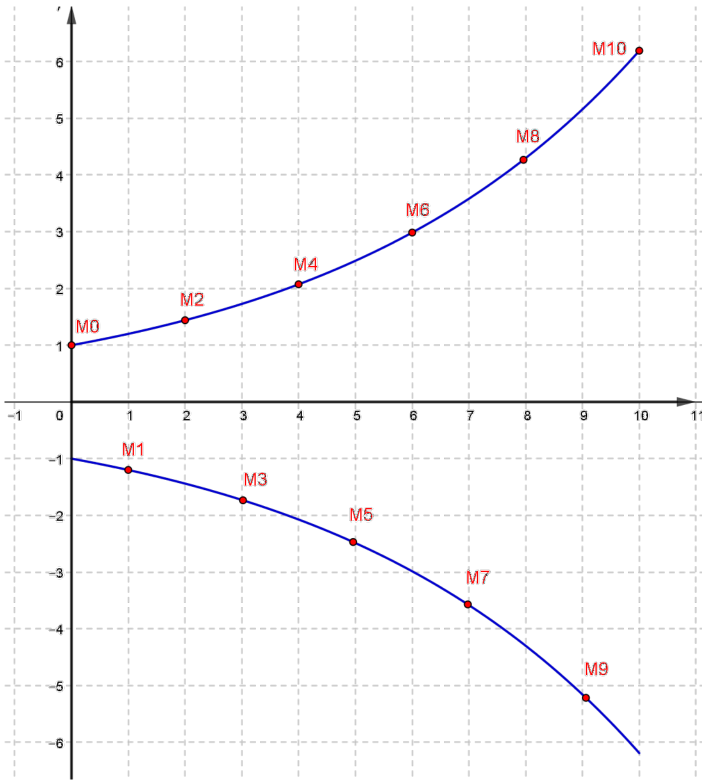
$q \leqslant -1$ donc la suite n'est pas monotone et n'admet pas de limite.

Représentation graphique

$M_i(i;u_i)$

Les points M_i appartiennent aux courbes représentatives des fonctions g_1 et g_2 définies par :

$g_1(x)=(-1,2)^x$ et $g2(x)=-(-1,2)^x$.



2.6.f. (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0=-2$ et de raison q = -0,8.

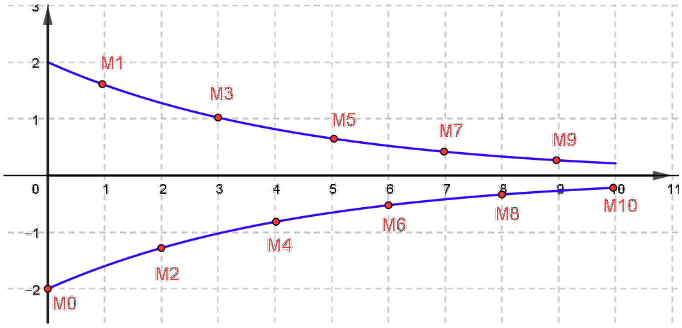
-1 < q < 0 donc la suite n'est pas monotone et converge vers 0.

Représentation graphique

$M_i(i;u_i)$

Les points M_i appartiennent aux courbes représentatives des fonctions g_1 et g_2 définies par :

$g_1(x)=-2\times(0,8)^x$ et $g_2(x)=2\times(0,8)^x$



2.7. Propriété

2.7.a. Si (u_n) est une suite géométrique alors pour tout entier naturel n : $u_{n+1}^2 = u_n \times u_{n+2}$

Preuve

(u_n) est une suite géométrique de raison q

$u_{n+1} = q\,u_n \qquad u_{n+2} = q^2 u_n$

$u_n \times u_{n+2} = u_n \times q^2 \times u_n = q^2 \times u_n^2 = (q\,u_n)^2 = u_{n+1}^2$

2.7.b. Rappel

Si a et b sont deux nombres réels positifs alors le nombre $c = \sqrt{ab}$ est la moyenne géométrique des nombres a et b (c : est la longueur du côté d'un carré de même aire qu'un rectangle dont les longueurs des côtés sont a et b).

2.7.c. Conséquence

Si on considère trois teres consécutifs, d'une suite géométrique à termes positifs, alors le terme du milieu est la moyenne géométrique des deux autres termes.

2.8. Somme des premiers termes

(u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$.

$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

Il y a (n+1) termes.

$$S = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$S = \frac{(\text{(le premier terme)} - (\text{le suivant du dernier terme}))}{1 - \text{raison}}$$

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - (\text{raison})^{(\text{nombre de termes})}}{1 - \text{raison}}$$

Remarque

Si -1 < q < 1 alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S = \frac{u_0}{1-q}$

3. Suite harmonique

3.1. Moyenne harmonique

3.1.a. Exemple

Un cycliste se déplace de la ville A à la ville B distantes de 60 km, à la vitesse de 15 km/h pour le retour sa vitesse est de 30 km/h (le parcours a plus de descentes et de montées au retour qu'à l'aller).

Quelle est la vitesse moyenne pour l'aller-retour ?

Correction

Le temps mis par le cycliste pour le trajet aller est $t_1=\frac{60}{15}=\frac{d}{v}=4 \text{ h}$.

Le temps mis par le cycliste pour le trajet retour est $t_2=\frac{60}{30}=2 \text{ h}$.

La distance parcourue pour l'aller et le retour est 60+60= 120 km, le temps mis pour parcourir cette distance est 4+2=6 h.

La vitesse moyenne pour l'aller et retour est : $V=\frac{d}{t}=\frac{120}{6}$ = **20 km/h**.

3.1.b. On reprend l'exemple en prenant pour distance entre A et B d km et la vitesse pour le trajet aller est $v_1 \text{ km/h}$ et la vitesse pour le trajet retour est $v_2 \text{ km/h}$.

$t_1=\frac{d}{v_1}$ est le temps en heures mis par le cycliste pour le trajet aller.

$t_2=\frac{d}{v_2}$ est le temps en heures mis par le cycliste pour le trajet retour.

t_1+t_2 est le temps en heures pour le trajet aller et retour. La distance du parcours est 2d.

La vitesse moyenne, pour l'aller et le retour

$$V=\frac{2d}{t_1+t_2}=\frac{2d}{\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$$

3.1.c. Définition

Si a et b sont deux nombres réels strictement positifs, on nomme moyenne harmonique de a et b le nombre $h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

3.2. Suite harmonique

3.2.a. Définition

La suite (u_n) définie pour tout entier n non nul par : $u_n=\frac{1}{n}$ se nomme suite harmonique.

3.2.b. Propriété

Pour tout entier naturel n non nul, $u_n=\frac{1}{n}$ $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$ $u_{n+2}=\frac{1}{n+2}$

$\frac{1}{u_n}=n$ $\frac{1}{n+2}=n+2$ $\frac{1}{u_n}+\frac{1}{n+2}=n+n+2=2n+2=2(n+1)$

$$\frac{2}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+2}}}=\frac{2}{2(n+1)}=\frac{1}{n+1}=u_{n+1}$$

Conclusion

u_{n+1} **est la moyenne harmonique de** u_n **et** u_{n+2} **.**

3.2.c. Pour tout entier naturel non nul, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-1}{n(n+1)}<0$.

La suite harmonique est strictement décroissante.

3.2.d. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

La suite harmonique converge vers 0.