Exemples de suites

1. Suite arithmético-géométrique

1.1. Définition

On nomme suite arithmético-géométrique, toute suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence du type, pour tout entier naturel n $u_{n+1}=a\,u_n+b$ (a et b sont deux constantes réelles).

Remarques

. Si a=1 alors la suite (u_n) est la suite arithmétique de raison b.

. Si b=0 alors la suite (u_n) est la suite géométrique de raison a.

1.2. Exemple 1

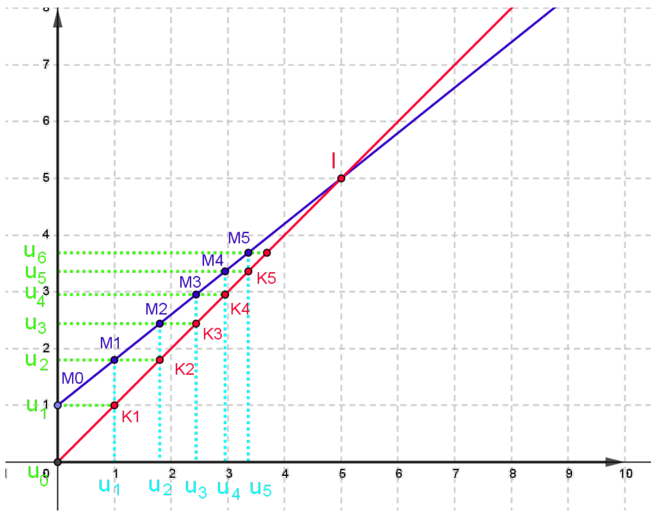
On considère les suites (u_n) telles que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}8\,u_n+1$.

1.2.a. 1^{er} cas : $u_0=0$

$f(x)=0{,}8x+1$. La courbe représentative de la fonction f (dans un repère orthonormé) est la droite d'équation $y=0{,}8x+1$.

$f(u_n)=u_{n+1}$ donc u_{n+1} est l'ordonnée du point M_n de la courbe représentative de f, d'abscisse u_n .

$K_n(u_n;u_n)$ donc K_n est le point de la droite d'équation y=x d'ordonnée u_n .



$u_0=0$ alors on place le point M_0 (sur la droite en bleu), l'ordonnée de ce point est u_1 on place K_1 (sur la droite en rouge) l'abscisse de K_1 est u_1 on construit successivement M_1 , K_2 , M_2 , K_3 ...
En regardant la figure précédente, on peut conjecturer que la suite (u_n) est majorée par 5, car les points (M_i) ont une abscisse inférieure de celle de I.
On peut démontrer la croissance de cette suite en utilisant un raisonnement par récurrence.
Mais nous n'avons pas étudié de méthode permettant de conclure pour la convergence de cette suite.
Pour pouvoir étudier la convergence de cette suite, on considère une nouvelle suite : (v_n) définie pour tout entier naturel n : $v_n=5-u_n$.
(Remarque : 5 est l'abscisse du point d'intersection I des deux droites).
On veut démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
Pour tout entier naturel n.

$v_{n+1}=5-u_{n+1}=5-(0{,}8\,u_n+1)=-0{,}8\,u_n+4$

or $u_n=5-v_n$ car $v_n=5-u_n$

$v_{n+1}=-0{,}8(5-v_n)+4=-4+0{,}8\,v_n+4=0{,}8\,v_n$

$v_{n+1}=0{,}8\,v_n$ et $v_0=5-u_0=5$

(v_n) est suite géométrique de premier terme $v_0=5$ et de raison $q=0{,}8$.

donc $v_n=v_0\times 0{,}8^n=5\times 0{,}8^n$.

$0<q<1$ et $v_0>0$ donc (v_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.

$u_n=5-v_n$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$ ·

La suite (u_n) converge vers 5.

Pour tout entier naturel n $v_{n+1}<v_n$ car la suite (v_n) est strictement décroissante.

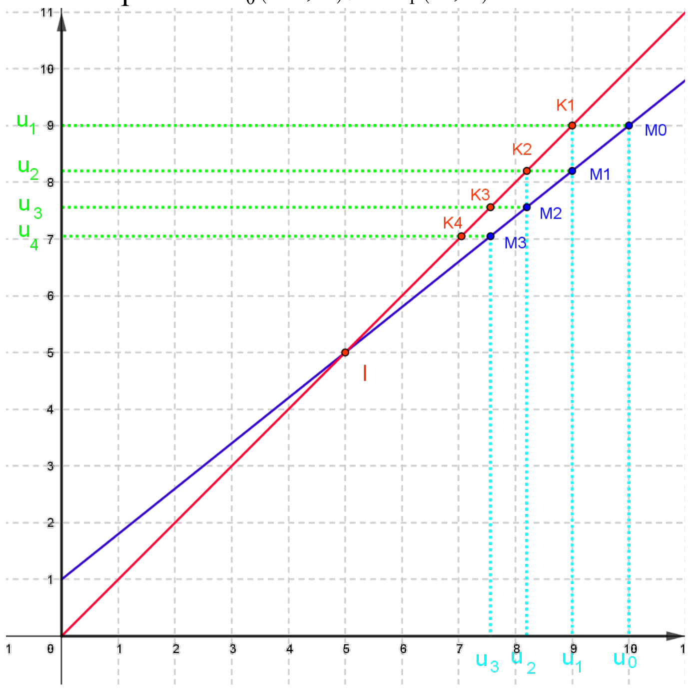
Donc $-v_{n+1}>-v_n$ et $5-v_{n+1}>5-v_n$ soit $u_{n+1}>u_n$

La suite (u_n) est strictement croissante.

1.2.b. 2[ème] <u>cas :</u> $u_0=10$

On trace les droites d'équations : y=0,8x+1 et y=x.

On effectue la construction des points $M_0(10;9)$, $K_1(9;9)$ . . .



On conjecture que la suite est décroissante et convergente.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n : $v_n=5-u_n$.

On vérifie de même que la suite (v_n) est une suite géométrique, de raison : 0,8, son premier terme est :

$v_0=5-u_0=5-10=-5$, donc pour tout entier naturel n : $v_n=-5\times 0{,}8^n$.

$0<0{,}8<1$ et $v_0<0$ donc la suite (v_n) est strictement croissante et converge vers 0.

On en déduit que (u_n) est **strictement décroissante et converge vers 5.**

1.2.c. 3[ème] <u>cas :</u> $u_0=5$

$u_{n+1}=0{,}8\,u_n+1$ $u_1=0{,}8\times 5+1=4+1=5$

$u_1=5=u_2=$ . . .

La suite (u_n) est **constante.**

Graphiquement : tous les points M_i et K_i sont confondus avrc le point I.

Remarque : (v_n) est la suite nulle car $v_0=0$.

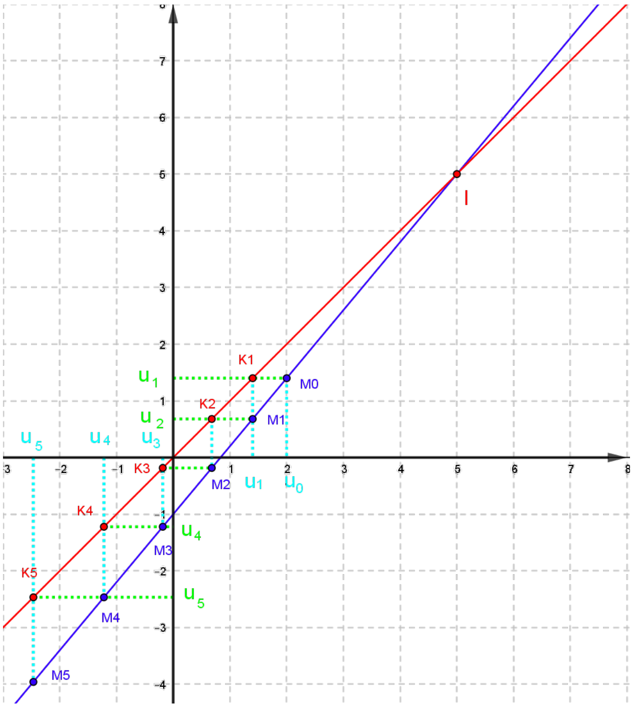
1.3. Exemple 2

On considère les suites (u_n) telles que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=1{,}2\,u_n-1$.

1.3.a. 1[er] <u>cas :</u> $u_0=2$

On trace les droites d'équations : y=1,2x-1 et y=x.

On construit les points M_1 , M_2 . . . K_1 , K_2 . . .



I(5;5)

On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n=5-u_n$.

$v_{n+1}=5-u_{n+1}=5-(1{,}2\,u_n-1)=5-1{,}2\,u_n+1=-1{,}2\,u_n+6$

Or $u_n=5-v_n$ car $v_n=5-u_n$

$v_{n+1}=-1{,}2(5-v_n)+6=-6+1{,}2\,v_n+6=1{,}2\,v_n$

Donc la suite (v_n) est la suite géométrique de raison q=1,2 et de premier terme $v_0=5-u_0=3$.

Pour tout entier naturel n : $v_n=3\times 1{,}2^n$ $1{,}2>0$ et $v_0>0$ donc la suite (v_n) est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

Pour tout entier naturel n : $u_n=5-v_n$ donc (u_n) est **strictement décroissante et** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

1.3.b. 2$^{\text{ème}}$ <u>cas :</u> $u_0=7$

On trace les droites d’équations : y=1,2x-1 et y=x.

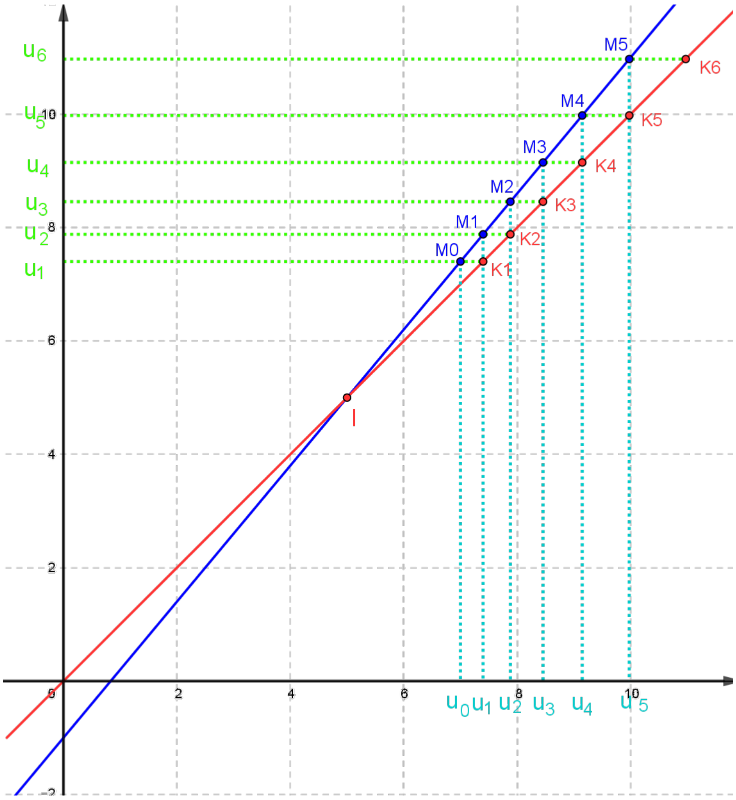
On construit les points M_0 , M_1 . . . K_1 , K_2 . . .

Pour tout entier n : $v_n=5-u_n$.

(v_n) est la suite géométrique de raison : 1,2 et de premier terme : $v_0=5-u_0=5--2$.

Pour tout entier n : $v_n=-2\times 1{,}2^n$ $1{,}2>0$ et $v_0<0$, donc (v_n) est strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$.

Pour tout entier naturel n : $u_n=5-v_n$ donc (u_n) est **strictement croissante et** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.



1.3.c. 3$^{\text{ème}}$ <u>cas :</u> $u_0=5$

La suite (u_n) est la suite constante égale à 5.

La suite (v_n) est la suite nulle.

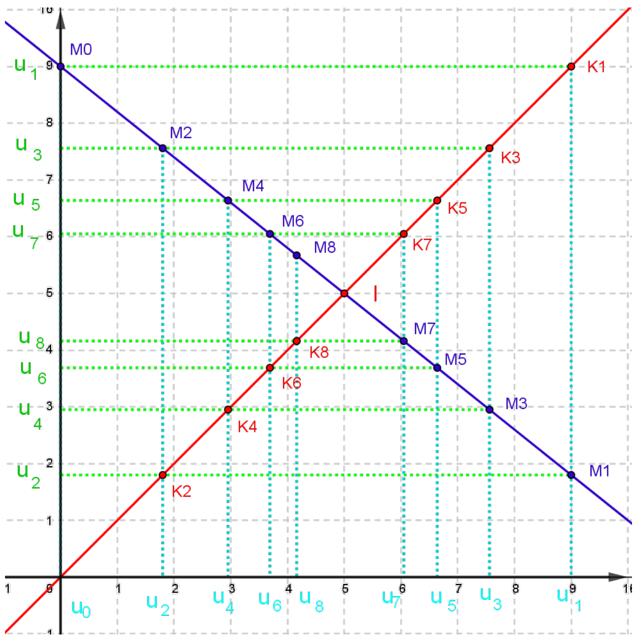
1.4. Exemple 3

On considère les suites (u_n) telles que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=-0{,}8\,u_n+9$.

1.4.a. 1$^{\text{er}}$ <u>cas :</u> $u_0=0$

On trace les droites d'équations : y=-0,8+9 et y=x.

On construit les points : M_0 , M_1 . . . K_1 , K_2 . . .



On conjecture que la suite n'est pas monotone et converge vers 5.

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n : $v_n=5-u_n$.

$v_{n+1}=5-u_{n+1}=5-(-0,8u_n+9)=5+0,8u_n-9=0,8u_n-4$

$v_{n+1}=0,8(5-v_n)-4=4-0,8v_n+4=-0,8v_n$

(v_n) est la suite géométrique de raison -0,8 et de premier terme : $v_0=5-u_0=-4$

Pour tout entier naturel n : $v_n=-4\times(-0,8)^n$, -1 < -0,8< 0 donc (v_n) n'est pas une suite monotone et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.

Pour tout entier naturel n : $u_n=5-v_n$, donc **la suite (v_n) n'est pas monotone et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$.**

1.4.b. 2ème cas : $u_0=5$

On démontre de même que la suite (u_n) est la suite constante égale à 5.

La suite (v_n) est la suite nulle.

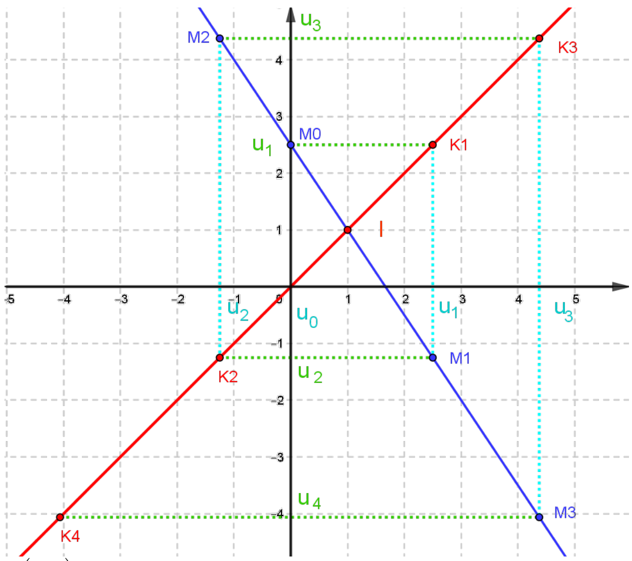
1.5. Exemple 4

On considère les suites (u_n) telles que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=-1,5u_n+2,5$.

1.5.a. 1er cas : $u_0=0$

On trace les droites d'équations : y=-1,5x+2,5 et y=x.

On construit les points M_0 , M_1 . . . K_1 , K_2 . . .



On conjecture que la suite (u_n) n'est pas monotone et n'est pas convergente.

Pour cet exemple $I(1;1)$, on considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n=5-u_n$.

$v_{n+1}=1-u_{n+1}=1-(-1,5u_n+2,5)=1+1,5u_n-2,5=1,5u_n-1,5$

$v_{n+1}=1,5(1-v_n)-1,5=-1,5v_n$

(v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0=1-u_0=1$ et de raison q= -1,5

Pour tout entier naturel n : $v_n=(-1,5)^n$.

(v_n) n'est pas monotone et n'admet pas de limite.

$u_n=1-v_n$

(u_n) **n'est pas monotone et n'admet pas de limite.**

1.6. Exercice

On considère les suites (u_n) telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,2u_n+10$.

Les deux droites d'équations y=0,2x+10 et y=x sont sécantes en I(12,5;12,5).

On pose pour tout entier naturel n : $v_n=12{,}5-u_n$.

$v_{n+1}=12{,}5-u_{n+1}=12{,}5-(0{,}2\,u_n+10)=12{,}5-0{,}2\,u_n-10=-0{,}2\,u_n+2{,}5$

$v_{n+1}=-0{,}2(12{,}5-v_n)+2{,}5=-2{,}5+0{,}2\,v_n+2{,}5=0{,}2\,v_n$

(v_n) est la suite géométrique de raison 0,2 et de premier terme $v_0=12{,}5-u_0$.

Pour tout entier naturel n : $v_n=(12{,}5-u_0)\times 0{,}2^n$.

1.6.a. 1^{er} <u>cas :</u> $u_0=10$

Pour tout entier naturel n : $v_n=2{,}5\times 0{,}2^n$.

$0<0{,}2<1$ et $v_0>0$ donc la suite (v_n) est strictement décroissante et converge vers 0.

Pour tout entier naturel n : $u_n=12{,}5-v_n$.

on vérifie facilement que **la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers 12,5.**

1.6.b. $2^{ème}$ <u>cas :</u> $u_0=15$

Pour tout entier naturel n : $v_n=-2{,}5\times 0{,}2^n$

$0<0{,}2<1$ et $v_0<0$

donc (v_n) est strictement croissante et converge vers 0.

Pour tout entier naturel n : $u_n=12{,}5-v_n$.

On vérifie facilement que **la suite (u_n) est strictement décroissante et converge vers 12,5.**

1.6.c. $3^{ème}$ <u>cas :</u> $u_0=12{,}5$

$v_0=0$ donc pour tout entier naturel n : $v_n=0\times 0{,}2^n=0$.

Pour tout entier naturel n : $u_n=12{,}5-0=12{,}5$.

La suite (u_n) est la suite constante égale à 12,5.

2. Exemple d'une suite récurrente

Soit la suite (u_n) telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+2}=5\,u_{n+1}-6\,u_n$ et u_0 et $u_1=1$.

On est capable de calculer successivement tous les termes de la suite en utilisant un tableur ou en utilisant le logiciel Python (revoir la leçon Généralités sur les suites).

On se propose d'exprimer le terme général en fonction de n.

2.1. On considère la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n : $v_n=u_{n+1}-2\,u_n$

$v_0=u_1-2\,u_0=1-2\times 0=1$.

On veut démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n/

$v_{n+1}=u_{n+2}-2\,u_{n+1}=(5\,u_{n+1}-6\,u_n)-2\,u_{n+1}=3\,u'=_{n+1}-6\,u_n=3(u_{n+1}-2\,u_n)$

$v_{n+1}=3\,v_n$

(v_n) est la suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0=1$.

Pour tout entier naturel n : $v_n=3^n$.

2.2. On considère la suite (w_n) telle que pour tout entier naturel n : $w_n=u_{n+1}-3\,u_n$

$w_0=u_1-3u_1-3\times 0=1$

On veut démontrer que la suite (w_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n :

$w_{n+1}=u_{n+2}-3u_{n+1}=(5u_{n+1}-6u_n)-3u_{n+\{1\}}=2u_{n+1}-6u_n$

$w_{n+1}=2(u_{n+1}-3u_n)=2w_n$

(w_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme $w_0=1$.

Pour tout entier naturel n : $w_n=2^n$

2.3. Pour tout entier naturel n :

$v_n=u_{n+1}-2u_n$

$w_n=u_{n+1}+3u_n$

donc $v_n-w_n=u_n$

Conclusion

Pour tout entier naturel n : $u_n=3^n-2^n$ **.**