Fiche Exercices 1

Exercice1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}25\,u_n+3$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n que le signe de $(u_{n+2}-u_{n+1})$ est égal au signe de $(u_{n+1}-u_n)$.

2. En utilisant le principe de récurrence, démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_1=1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+2}=2\,u_{n+1}+8\,u_n$;

1. Démontrer que la suite (v_n) telle que pour tout entier naturel n : $v_n=u_{n+1}-4\,u_n$ est une suite géométrique.

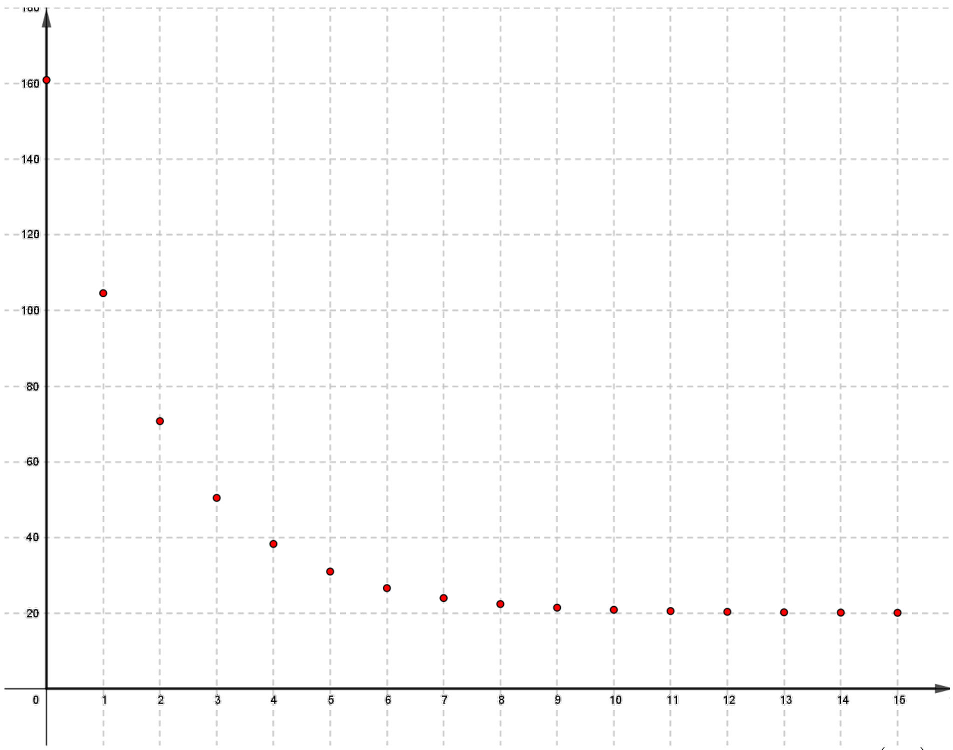
2. Démontrer que la suite (w_n) telle que pour tout entier naturel n : $w_n=u_{n+1}+2\,u_n$ est une suite géométrique.

3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 3

Partie A

Observations d'une suite de nombres



1. On donne ci-dessus la représentation graphique des 16 premiers termes d'une suite (u_n) dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

2. Les quatre premiers termes de la suite (u_n) ont été calculés avec un tableur :

n	u_n
0	161
1	104.6
2	70.76
3	50.456

La suite (u_n) peut-elle être une suite géométrique ?
On justifiera la réponse donnée.

Partie B : Étude de la suite

La suite (u_n) observée dans la partie A est définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=0{,}6\,u_n+8$ et $u_0=161$.

1. Calculer u_4 .

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-20$.
Montrer que (v_n) est une suite géométrique. On précisera le premier terme et la raison.

3. Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n) .

Bac TES novembre 2010 Nouvelle Calédonie

Exercice 4

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres,en milliers, au cours de l'année (2010+n). En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante , un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des des arbres existants et de replanter 3000 arbres.

1. Montrer que la situation peut-être modélisée par :
$u_0=50$ et pour tout entier naturel n par la relation : $u_{n+1}=0{,}95\,u_n+3$.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=60-u_n$.

2.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

2.b. Calculer v_0 . Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.

2.c. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n=60-10\times(0{,}95)^n$.

3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une vaeur approchée arrondie à l'unité.

4.a. Vérifier que pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $u_{n+1}-u_n=0{,}5\times(0{,}95)^n$.

4.b. En déduire la monotonie de la suite.

5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.

6. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter.

Bac TES juin 2010 Centres étrangers

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+4}{3}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 .

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm).

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+4}{3}$.

2.a. Tracer la représentation graphique d de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation y=x.

2.b. En utilisant d et Δ , construire u_1, u_2 et u_3 .

2.c. Conjecturer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ à l'aide de la construction, que l'on peut imaginer, d'un grand nombre de termes de la suite (u_n) .

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n$.

3.a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3.b. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n=4-3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

3.c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Bac TES novembre 2009 Amérique du Sud

CORRECTION

Exercice 1

$u_0=0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}25\,u_n+3$.

1. On a donc $u_{n+2}=0{,}25\,u_{n+1}+3$.

$u_{n+2}-u_{n+1}=0{,}25\,u_{n+1}+3-(025\,u_n+3)=0{,}25(u_{n+1}-u_n)$

$0{,}25>0$ donc le signe de $(u_{n+2}-u_{n+1})$ est égal au signe de $(u_{n+1}-u_n)$.

2. $u_1=0{,}25\,u_0+3=0{,}25\times 0+3=3$

donc $u_1-u_0=3>0$

On veut démontrer en utilisant le principe de récurrence que la propriété P(n) : $u_{n+1}>u_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Initialisation

On a : $u_1-u_0>0$ donc $u_1>u_0$ et P(0) est vraie.

Hérédité

Pour démontrer que la propriété est héréditaire, pour tout eentier naturel n, on suppose que P(n) est vraie c'est à dire : $u_{n+1}>u_n$, et on doit démontrer que P(n+1) est vraie c'est à dire : $u_{n+2}>u_{n+1}$.

Si $u_{n+1}>u_n$ alors $u_{n+1}-u_n>0$ comme $(u_{n+2}-u_{n+1})$ a le même signe, on obtient $u_{n+2}-u_{n+1}>0$ soit $u_{n+2}>u_{n+1}$.

Conclusion

Pour tout entier naturel n on a $u_{n+1}>u_n$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 2

$u_0=0$ et $u_1=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=2\,u_{n+1}+8\,u_n$

1. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_{n+1}-4\,u_n$.

$v_{n+1}=u_{n+2}-4\,u_{n+1}=(2\,u_{n+1}+8\,u_n)-4\,u_{n+1}=-2\,u_{n+1}+8\,u_n=-2(u_{n+1}-4\,u_n)$

$v_{n+1}=-2\,v_n$

$v_0=u_1-4\,u_0=1$

donc (v_n) **est la suite géométrique de raison : -2 et premier terme 1.**

$v_n=1\times(-2)^n=(-2)^n$

2. Pour tout entier naturel n : $w_{n+1}=u_{n+1}+2\,u_n$.

$w_{n+1}=u_{n+2}+2\,u_{n+1}=(2\,u_{n+1}+8\,u_n)+2\,u_{n+1}=4\,u_{n+1}+8\,u_n=4(u_{n+1}+2\,u_n)$

$w_{n+1}=4\,w_n$

$w_0=u_1+2\,u_0=1$

donc (w_n) **est la suite géométrique de raison 4 et de premier terme 1.**

$w_n=1\times 4^n=4^n$

3. Pour tout entier naturel n :

$v_n=u_{n+1}-4\,u_n$

$w_n=u_{n+1}+2\,u_n$

$w_n-v_n=6\,u_n$

$u_n=\frac{1}{6}(w_n-v_n)=\frac{1}{6}(4^n-(-2)^n)$.

Exercice 3

Partie A

1. Conjecture :

La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n=20$.

2. Si (u_n) est une suite géométrique de raison : q alors pourtout entier naturel n : $u_{n+1}=q\,u_n$.

- $u_0=161$ et $u_1=104{,}6$

  $\frac{u_1}{u_0}=\frac{104{,}6}{161}=0{,}65$ (à 10^{-2} près)
- $u_1=104{,}6$ et $u_2=70{,}76$

  $\frac{u_2}{'u_1}=\frac{70{,}76}{104{,}6}=0{,}68$ (à 10^{-2} près)

$0{,}65\neq 0{,}68$ donc **la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.**

Remarque

Si (u_n) est une suite géométrique alors pour tout entier naturel n : $u_{n+1}^2=u_n\times u_{n+2}$.

On doit donc avoir :

$u_1^2=u_0\times u_2$

Or $u_1^2=104{,}6^2=10941{,}16$ $u_0\times u_2=161\times 70{,}76=11392{,}36$

La suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Partie B

1. $u_0=161$ et pour pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0{,}6u_n+8$.

$u_4=0{,}6u_3+8=0{,}6\times 50{,}456+8=38{,}2736$

u_4 = **38,2736**

2. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-20$.

$v_{n+1}=u_{n+1}-20=(0{,}6u_n+8)-20=0{,}6u_n-12=0{,}6(v_n+20)-12=0{,}6v_n-12+12$

$v_{n+1}=0{,}6v_n$

$v_0=u_0-20=161-20=141$

(v_n) **est la suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme 141.**

3. $v_n=v_0q^n=141\times(0{,}6)^n$

$u_n=v_n+20=20+141\times(0{,}6)^n$

4. $0 < 0{,}6 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

$u_n=v_n+20$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=20$

Exercice 4

1. En 2010 dans la forêt il y a 50000 arbres donc 50 milliers d'arbres.

Pour tout entier naturel n, pour l'année 2010+n, le nombre d'arbres en milliers est : u_n , on abat 5 % des arbres donc il en reste 95 % soit $0{,}95u_n$ (en milliers d'arbres) et on replante 3000 arbres soit 3 milliers d'arbres. Donc $u_{n+1}=0{,}95u_n+3$.

2. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n par : $v_n=60-u_n$.

2.a. $v_{n+1}=60-u_{n+1}=60-(0{,}95u_n+3)=57-0{,}95u_n=57-095(60-v_n)=57-0{,}95\times 60+0{,}95v_n$

$v_{n+1}=57-57+0{,}95v_n=0{,}95v_n$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

2.b. $v_0=60-u_0=60-50=10$

Pour tout entier naturel n : $v_n=v_0q^n=10\times(0{,}95)^n$

2.c. Pour tout entier naturel n: $u_n=60-v_n$

$u_n=60-10\times(0{,}95)^n$.

3. $2015=2010+5$ donc n=5.

$u_5=60-0\times(0{,}95)^5$ = 52,622 à 10^{-3} près.

Le nombre d'arbres en 2015 est : 52262.

4.a. Pour tout entier naturel n :

$u_{n+1}-u_n=(0{,}95u_n+3)-u_n=(0{,}95-1)u_n+3=-0{,}05u_n+3=-0{,}05(60-v_n)+3$

$u_{n+1}-u_n=-0{,}05\times 60+0{,}05v_n+3=-3+0{,}05v_n+3=0{,}05v_n=0{,}05\times 10\times(0{,}95)^n$

$u_{n+1}-u_n=0,5\times(0,95)^n$

4.b. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n>0$ donc $u_{n+1}>u_n$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

5. $u_n=60-10\times(0,95)^n$

10 % de 50000 est égal à 5000 soit 5 milliers d'arbres

On doit déterminer les entiers naturels n tels que : $u_n \geqslant 50+5=55$

$60-10\times(0,95)^n \quad 55 \quad \Leftrightarrow \quad 60-55 \geqslant 10\times(0,95)^n \quad \Leftrightarrow \quad 5 \geqslant 10\times(0,95)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{10}\geqslant(0,95)^n$

$\Leftrightarrow \quad 0,5 \geqslant (0,95)^n$

On peut utiliser la calculatrice pour déterminer les valeurs de n , la suite $(0,95^n)$ est strictement décroissante il suffit de trouver la plus petite valeur de n.

On obtient : $0,95^{13}=0,51$ à 10^{-2} près et $0,95^{14}=0,49$ à 10^{-2} près.

Donc $n \geqslant 14$ et 2010+14= **2024..**

On peut aussi utiliser les propriétés de la fonction ln.

$0,5 \geqslant 0,95^n \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0,5) \geqslant \ln(0,95^n) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0,5) \geqslant n\times\ln(0,95)$

$0 < 0,95 < 1$ donc $\ln(0,95) < 0$

$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \leqslant n \qquad \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}=13,5$ n est un entier naturel donc $14 \leqslant n$ et 2010+14= **2014.**

6. La raison de la suite (v_n) est q=0,95.

$0 < 0,95 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

$u_n 60-v_n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=60$

Dans un avenir lointain le nombre d'arbres de la forêt sera voisin de 60 000.

COMPLEMENTS

(u_n) est la suite définie par $u_0=50$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=0,95\,u_n+3$.

u_n désigne le nombre d'arbres de la forêt, en milliers, au cours de l'année (2010+n).

La suite (u_n) est strictement crissante.

Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres est supérieur ou égal à 55 000.

. Utilisation d'un tableur

En A1 : 2010 en B1 : 50

En A2 : =A1+1 en B2:=0,95*B1+3

Puis on étire.

	A	B
1	2010	50
2	2011	50,5
3	2012	50,975
4	2013	51,42625
5	2014	51,8549375
6	2015	52,26219063
7	2016	52,64908109
8	2017	53,01662704
9	2018	53,36579569
10	2019	53,6975059
11	2020	54,01263061
12	2021	54,31199908
13	2022	54,59639912
14	2023	54,86657917
15	2024	55,12325021
16		

On obtient : **2024.**

. Utilisation d'un algorithme

Variables : n est un entier naturel
u est un nombre réel
Initialisation : n=2010
u=50
Traitement : Tant que u < 55
    u=0,95u+3
    n=n+1
Fin Tant que
Sortie : Afficher n

. Programmation en utilisant le logiciel Python

```
print('Début de programme')
n,u=2010,50
while(u<55):
    n=n+1
    u=u*0.95+3
print("'année cherchée est:"+str(n))
print('Fin de programme')
```

. On exécute le programme

```
Début de programme
'année cherchée est:2024
Fin de programme
>>>
```

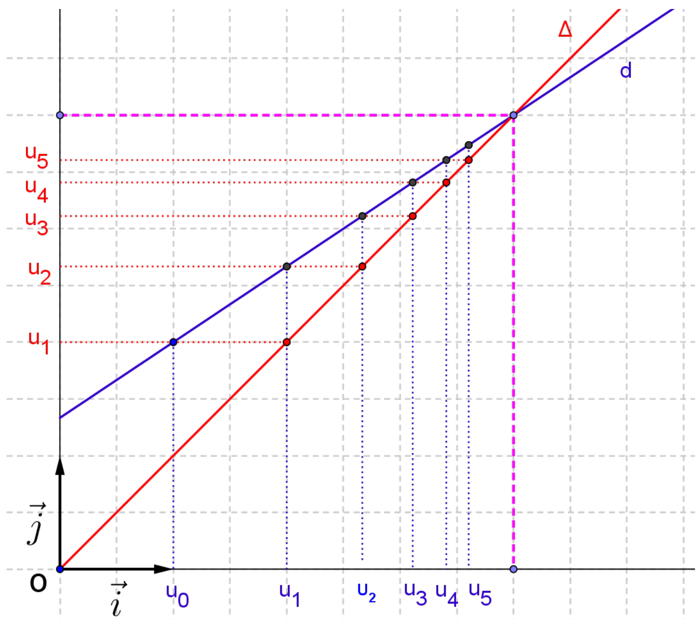
Exercice 5

La suite (u_n) est définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+4}{3}$.

1.

$$u_1=\frac{2+4}{3}=\frac{6}{3}=2 \qquad u_2=\frac{2\times 2+4}{3}=\frac{8}{3} \qquad u_3=\frac{2\times\frac{8}{3}+4}{3}=\frac{16+12}{9}=\frac{28}{9}$$

2.



Conjecture $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=4$

3. Pour tout entier naturel n : $v_n=u_n-4$.

3.a. $v_{n+1}=u_{n+1}-4=\frac{2u_n+4}{3}-4=\frac{2u_n+4-12}{3}=\frac{2u_n-8}{3}$

$v_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n-4)=\frac{2}{3}v_n$.

(u_n) **est la suite géométrique de premier terme : -3 et de raison :** $\frac{2}{3}$ **.**

3.b. $v_n=v_0q^n=-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$v_n=u_n-4$ donc $u_n=v_n+4$

$u_n=4-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

3.c. $0<\frac{2}{3}<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}v_n=0$.

$\lim_{n\to+\infty}u_n=4$